Corellation partielle dans le cas "qualitatif"

Israël-César Lerman

IRIA

CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 111

CORRÉLATION PARTIELLE DANS LE CAS "QUALITATIF"

Israël Cesar LERMAN

Janvier 1982

CORRÉLATION PARTIELLE

DANS LE CAS "QUALITATIF"

Israël Cesar LERMAN

Publication Interne n° 153 - Octobre 1981 - 125 pages

Résumé : Pour les différents types de variables descriptives discrètes d'un ensemble fini E d'objets (variables attributs, qualitatives nominales, qualitatives ordinales et "rang"), on élabore un coefficient d'association partielle entre deux variables v et w, relativement à une troisième variable u.

Contrairement à de nombreuses méthodes qui, d'une façon plus ou moins arbitraire, plongent les échelles discrètes dans des échelles numériques, nous proposons une représentation mathématique fidèle ayant un caractère ensembliste ou ordinal.

La démarche générale consiste alors à réduire le lien brut s(v,w) entre les deux variables par rapport à une situation aléatoire où à v(resp. w), on associe une variable aléatoire définissant sur l'ensemble E le même type de structure que v (resp. w) et dont la position par rapport à u est préservée.

Summary : A coefficient of partial association between the variables v and w relatively to a third variable u is developped in the case of different types of discreet descriptive variables on a finite set E of objects (attributes, nominale qualitative, ordinal qualitative and rank variables).

Contrarily to a numerous methods that plunge the discreet scale into a numerical scale in a more or less arbitrary way, we propose a faithful mathematical representation having an ordinal or set theoretic character.

The general procedure consists in reducing the rough association s(v,w) between two variables, with respect to a random situation where to the variable v (respectively w), is associated a random variable defining the same type of structure on E as the variable v (respectively w) and whose position relatively to u is preserved.

Secrétariat de Rédaction : Melle F. Moinet - IRISA - Lab. Informatique
Université de Rennes, Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L.A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

I. INTRODUCTION GENERALE ET RAPPELS.

On considère ici le problème de la définition du coefficient de corrélation entre deux variables partielle par rapport à une troisième variable dont il s'agit de neutraliser l'influence. Ce problème, dans le cas où les variables sont discrètes, n'a pas à notre connaissance reçu jusqu'à présent un traitement conceptuel clair conduisant à des expressions indiscutables.

Nous allons pour le montrer nous référer à deux cas importants.

Le premier est celui où on dispose de trois variables qualitatives nominales α, β et γ dont chacune définit une partition sur l'ensemble E des individus (défini par l'échantillon observé) et où on désire définir le coefficient de corrélation partielle $\rho_{\beta\gamma.\alpha}$.

Désignons par $P = \{A_i \mid 1 \leq i \leq I\}$, $Q = \{B_j \mid 1 \leq j \leq J\}$ et $R = \{C_k \mid 1 \leq k \leq K\}$ les partitions respectivement définies par α, β et γ sur E. Relativement à un couple de telles variables, (β, γ) par exemple, introduisons les proportions :

$$p(j \wedge k) = \mathrm{card}(B_j \cap C_k) / \mathrm{card}(E) ,$$

$$p(j) = \mathrm{card}(B_j) / \mathrm{card}(E) \quad \text{et} \quad p(k) = \mathrm{card}(C_k) / \mathrm{card}(E),$$

$$1 \leq j \leq J \quad , \quad 1 \leq k \leq K .$$

En posant

$$\phi^2_{\beta\gamma} = \sum_{(j,k)} \left(p^2(j \wedge k) / p(j)\,p(k) \right) - 1 , \qquad (1)$$

le carré du coefficient de Tschuprow entre les variables β et γ, se met sous la forme

$$T_{\beta\gamma} = \phi^2_{\beta\gamma} \Big/ \sqrt{(J-1)(K-1)} . \qquad (2)$$

G. Saporta [SAPORTA (1976)] montre qu'on peut définir $\phi^2_{\beta\gamma}$ comme le produit de deux opérateurs de normes respectives $\sqrt{J-1}$ et $\sqrt{K-1}$. $T_{\beta\gamma}$ est de la sorte un indice de liaison entre variables qualitatives nominales pouvant correspondre au cœfficient de corrélation usuel entre variables numériques. Par analogie G. Saporta propose alors le cœfficient $T_{\beta\gamma.\alpha}$ suivant comme indice de liaison partielle entre β et γ, relativement à α.

$$T_{\beta\gamma.\alpha} = \frac{T_{\beta\gamma} - T_{\alpha\beta}\,T_{\alpha\gamma}}{\sqrt{1-T^2_{\alpha\beta}}\,\sqrt{1-T^2_{\alpha\gamma}}} \qquad (3)$$

J. Daudin [DAUDIN (1979)] met en évidence le grave défaut de ce dernier indice de ne pas être nul en cas d'indépendance conditionnelle où pour toute valeur de α β et γ sont des variables indépendantes.

Signalons tout de suite que les indices que nous proposerons n'auront pas cet inconvénient majeur.

Le deuxième cas important et classique que nous mentionnerons est celui où les variables, dites "rang", sont totalement et strictement ordinales. Soient σ, ω et ϖ trois telles variables dont chacune définit un ordre total sur l'ensemble E des individus. Le problème est alors de définir un indice de liaison partielle $\rho_{\omega\varpi.\sigma}$ neutralisant l'effet de σ dans la liaison entre ω et ϖ.

Ce que propose M.G. Kendall [KENDALL (1942), cf. (1970)] correspond formellement en fait à commencer par représenter chacun des ordres totaux par son graphe dans $E\times E$, respectivement σ, ω et ϖ par $R(\sigma)$, $R(\omega)$ et $R(\varpi)$ où par exemple

$$R(\sigma) = \{(x,y) / (x,y) \in E\times E,\ x<y\ (\sigma)\},$$

avec des expressions analogues pour $R(\omega)$ et $R(\varpi)$. Il se situe ensuite dans $R(\sigma)$ et définit dans ce cadre le cœfficient d'association de K. Pearson entre les deux attributs représentés par les deux parties $R(\sigma)\cap R(\omega)$ et $R(\sigma)\cap R(\varpi)$. Cet indice se met par conséquent sous la forme :

$$\tau_{\omega\varpi.\sigma} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \qquad (4)$$

où $a = \text{card}\,[R(\sigma)\cap R(\omega)\cap R(\varpi)]$, $b = \text{card}\,[R(\sigma)\cap R(\omega)\cap R^c(\varpi)]$,

$c = \text{card}\,[R(\sigma)\cap R^c(\omega)\cap R(\varpi)]$, $d = \text{card}\,[R(\sigma)\cap R^c(\omega)\cap R^c(\varpi)]$.

M. G. Kendall constate avec étonnement, en attribuant le résultat à une coïncidence, que l'indice peut se mettre sous la forme

$$\tau_{\omega\varpi.\sigma} = \frac{\tau_{\omega\varpi} - \tau_{\omega\sigma}\cdot\tau_{\varpi\sigma}}{\sqrt{1-\tau^2_{\omega\sigma}}\,\sqrt{1-\tau^2_{\varpi.\sigma}}} \qquad (5)$$

où τ_{uv} n'est autre que l'indice établi entre deux variables "rang" u et v.

Notre analyse nous permettra de comprendre ce résultat et d'asseoir la conception de l'indice que nous découvrirons sur des bases formelles plus claires. Il s'avérera que le numérateur de ce dernier sera le même que celui proposé par M.G. Kendall ; mais il n'en sera pas de même du dénominateur. Notre indice sera en fait obtenu à partir du calcul de l'espérance mathématique et de la variance d'une variable aléatoire associée à un indice brut de comparaison entre ω et ϖ, dans le cadre d'une hypothèse d'absence de lien (h.a.l.) préservant d'une certaine façon les positions relatives entre ω et σ d'une part, ϖ et σ d'autre part. P.A.P. Moran [MORAN (1951)] qui avait effectué une étude par simulation de la distribution de $\tau_{\omega\varpi.\sigma}$, mais pour n très petit ($n = \text{card}(E) = 4$) avouait son impuissance devant ce calcul ; mais c'était dans le cadre d'une h.a.l. plus stricte que la nôtre.

Nous n'allons pas nous limiter dans ce travail à la seule étude des deux cas ci-dessus considérés. En effet, nous avons déjà élaboré une méthode très générale de construction d'un indice de proximité entre deux variables définissant deux structures finies de même type sur l'ensemble E des individus, quel que soit ce type [LERMAN (1973), (1976)].

Rappelons qu'un des principes généraux de notre approche est de substituer au point de vue géométrique qui prévaut à la définition du coefficient de corrélation linéaire entre variables quantitatives numériques, un point de vue combinatoire et permutationnel qui permet d'ailleurs de retrouver le même coefficient lorsqu'il s'agit de comparer des variables quantitatives.

Nous sommes amenés à distinguer deux principaux types d'une variable descriptive. Pour le premier, la variable est susceptible d'une représentation "fidèle" par une partie de E ou une pondération sur E, alors que pour le second, la variable ne peut être fidèlement représentée qu'au niveau de E×E, par une partie de E×E ou une pondération sur E×E. Dans la première classe définie par le premier grand type de variables, on a exactement l'"attribut descriptif" représentable par une partie de E et la variable quantitative représentable par une pondération sur E. D'autre part, toute variable définissant une relation binaire discrète ou pondérée sur E, rentre dans le cadre de la deuxième classe; ainsi en est-il de la variable qualitative nominale, de celle ordinale (totalement ou partiellement), de celle "rang" et enfin de celle définissant un graphe pondéré sur E.

Notre démarche générale dans l'élaboration d'un indice de proximité entre variables peut être shématisée par le diagramme suivant (cf. figure 1) que nous allons commenter en prenant l'exemple de la comparaison de deux variables qualitatives nominales.

Dans ce diagramme α et β sont les deux structures

$$(\alpha,\beta)\in A\times B \longrightarrow \big(R(\alpha),R(\beta)\big)\in \Omega\times\Omega \qquad (1)$$

$$\downarrow$$

$$s=\mathrm{card}\big(R(\alpha)\cap R(\beta)\big) \qquad (2)$$

$$\downarrow$$

$\boxed{\text{h.a.l. « respectant les caractéristiques de cardinalité » de } \alpha \text{ et } \beta}$

$$\downarrow$$

$$S=\mathrm{card}\big(R(\alpha')\cap R(\beta')\big) \qquad (3)$$

$$\downarrow$$

$$Q(\alpha,\beta)=\big(s-\mathcal{E}(S)\big)/\sigma(S) \qquad (4)$$

$$\downarrow$$

$$P(\alpha,\beta)=\Pr^{N}\{S<s\} \simeq \Phi\big(Q(\alpha,\beta)\big). \qquad (5)$$

figure-1.

de même nature à comparer. Dans l'exemple choisi α et β sont deux partitions où nous désignons par $t(\alpha)$ (resp. $t(\beta)$) le type de la partition α (resp. β) ; c'est à dire la suite ordonnée des cardinaux de ses classes. Dans ces conditions A (resp. B) est l'ensemble des partitions sur E de type $t(\alpha)$ (resp. $t(\beta)$). $R(\alpha)$ (resp. $R(\beta)$) est l'ensemble des paires (sous ensemble de l'ensemble $P_2(E)$ des parties à deux éléments de E) dont les deux composantes sont réunies dans une même classe de la partition α (resp. β). Ω peut être défini comme l'ensemble des parties de $P_2(E)$ dont chacune correspond à la représentation d'une relation d'équivalence sur E.

L'hypothèse d'absence de lien (h.a.l.), passage du niveau (2) au niveau (3), associe au couple (α, β) un couple (α^*, β^*) d'éléments aléatoires indépendants où α^* (resp. β^*) est un objet de même nature que α (resp. β) qui respecte d'une « certaine façon » les caractéristiques cardinales de α (resp. β). Dans l'exemple considéré une des formes de l'h. a. l. consiste à associer à α (resp. β) un élément aléatoire dans l'ensemble A (resp. B) des partitions sur E, muni d'une probabilité uniformément répartie.

$\mathcal{E}(S)$ et $\sigma^2(S)$ sont la moyenne et la variance de la variable aléatoire (v.a.) S et $Q(\alpha, \beta)$ est ce que nous appelons l'indice de proximité "centré réduit". Le passage de (3) à (4) est décisif puisque cet indice est celui d'association de K. Pearson s'il s'agit de comparer deux attributs de description ; à un coefficient multiplicatif près, celui de corrélation dans le cas de comparaison de deux variables numériques. D'autre part, dans le cas de la comparaison de deux variables "rang", le numérateur de Q est exactement le numérateur de l'indice τ de M.G. Kendall ; mais dans notre indice nous remplaçons le dénominateur de τ qui est le maximum de la valeur absolue du numérateur par l'écart type de la v.a. associée au numérateur. Toutefois, nous découvrons des indices nouveaux dans le cas de la comparaison de variables qualitatives nominales (variables "partition") et ordinales (variables "préordre total") où nous mettons en évidence un biais dans l'indice proposé pour cette situation par M. G. Kendall [LERMAN (1973)].

Dans le cas de la comparaison de deux parties $E(a)$ et $E(b)$ d'un même ensemble E (représentant en l'occurrence deux attributs descriptifs), nous avons pu mettre en évidence trois formes fondamentales de l'h.a.l. respectant chacune d'une certaine façon les caractéristiques cardinales de $E(a)$ et de $E(b)$ [LERMAN (1980)].

La première forme N_1 a un caractère combinatoire ; elle consiste à associer à une même partie D de cardinal d, une partie aléatoire D' qui représente un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, des parties de E de même cardinal d. Cette forme de l'h.a.l. conduit à une distribution hypergéométrique de la v.a. S (cf. niveau (3) du shéma).

Alors que dans le cas que nous venons de mentionner toute la mesure de probabilité est concentrée sur un même niveau de l'ensemble des parties de E, la deuxième forme N_2 de l'h.a.l. consiste à munir cet ensemble de parties d'une mesure de probabilité plus diffuse où le k-ème niveau, formé des parties à k éléments, est affecté de la probabilité $\binom{n}{k}\,\delta^k(1-\delta)^k$ où $\delta = d/n$. D'autre part, cette dernière probabilité est également répartie sur ce niveau. Cette deuxième forme de l'h.a.l. conduit à une distribution binomiale de la v.a. S.

La troisième forme N_3 de l'h.a.l. commence par associer à E, l'ensemble aléatoire $\mathcal{E}$ où l'aléa ne concerne que la v.a. entière $\mathcal{N} = card(\mathcal{E})$ qui est considérée comme une v.a. de Poisson de paramètre $n = card(E)$. Relativement à une réalisation $\mathcal{E}_0$ de cardinal m, les deux autres pas du modèle de choix correspondent à N_2.

Dans nos principales publications sur la comparaison de variables qualitatives [LERMAN (1973), (1976)], nous utilisons une h.a.l. de même nature que N_1. Cette forme de l'h.a.l. sera reprise ici, mais à deux niveaux différents. Le premier, que nous dirons local est celui que nous venons de mentionner et que nous avons d'ailleurs illustré ci-dessus dans le cas de la comparaison de deux partitions. Le deuxième niveau est plus global et consiste, toujours dans le cadre du même exemple, à associer à une même partition α, une partition α'

dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les partitions de même type $t(\alpha)$; mais, à n'effectuer les calculs conditionnels qui se présenteront en ne retenant d'une même paire d'objets de E que son appartenance ou non à l'ensemble $R(\alpha')$ des paires réunies, tout en ayant soin de tenir compte de la structure propre d'un couple ou q-uple (q entier positif) de paires d'objets.

C'est surtout dans le cas de la comparaison d'attributs que nous avions développé l'h.a.l. N_3 qui sera implicitement reprise ici dans le cas de la comparaison partielle de deux partitions conformément à la statistique du χ^2.

La suite des titres des principaux paragraphes est :

II – Coefficient de corrélation entre deux attributs, partielle relativement à un troisième attribut.

III – Coefficient de corrélation entre deux variables numériques, partielle relativement à un attribut, ou à une variable qualitative nominale.

IV – Coefficient de corrélation entre deux variables qualitatives nominales, partielle relativement à une troisième variable qualitative nominale.

V – Coefficient de corrélation entre deux variables qualitatives ordinales, partielle relativement à une troisième variable qualitative ordinale.

VI Coefficient de corrélation entre deux variables "rang", partielle relativement à une troisième variable "rang".

II – COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX ATTRIBUTS, PARTIELLE RELATIVEMENT A UN TROISIEME ATTRIBUT.

On désigne par a, b et c trois attributs descriptifs et par E l'ensemble des individus défini par l'échantillon étudié. Soient E(a), E(b) et E(c) les parties de E représentant respectivement a, b et c ; en d'autres termes E(a) est le sous ensemble de E formé des sujets qui possèdent l'attribut a, E(b) celui b et E(c) celui c. Nous shématisons la situation par le diagramme naïf suivant :

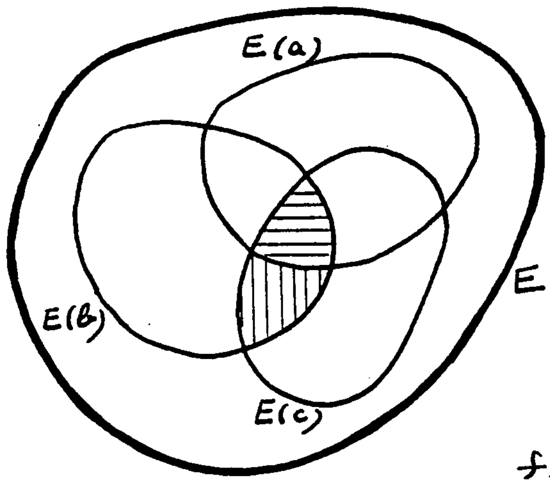

figure 2.

Il s'agit de définir un indice d'association partielle entre b et c, neutralisant l'influence de a. Nous nous proposons de le faire à partir d'une construction adéquate de l'h.a.l. de même nature que N_1 (cf. §I ci-dessus).

1_ INDICE BRUT ET H.A.L.

L'indice brut d'association entre b et c a toujours la même expression :

$$s(b, c) = n(b \wedge c) = \text{card}\, [E(b) \cap E(c)] \,, \qquad (1)$$

Comme dans le cas total l'h.a.l. peut avoir une forme unilatérale, en fixant par exemple E(b) et en associant à E(c) une partie aléatoire Z. Pour neutraliser l'influence de E(a), cette h.a.l. doit préserver les position relatives observées entre $E(a)$ et $E(b)$ d'une part, $E(a)$ et $E(c)$ d'autre part. Comme $E(a)$ et $E(b)$ sont fixées, la partie aléatoire Z doit avoir par rapport à $E(a)$, la même situation relative que celle qu'avait $E(c)$.

Dans ces conditions, Z sera choisie comme formée de la réunion de deux parties aléatoires indépendantes $Z(a)$ et $Z(\bar{a})$ où $Z(a)$ [resp. $Z(\bar{a})$] est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, des parties de $E(a)$ [resp. $E(\bar{a})$] de même cardinal $n(a\wedge c)$ [resp. $n(\bar{a}\wedge c)$], où nous avons noté $\bar{a}$ l'attribut opposé de a ; de sorte que $E(\bar{a}) = E - E(a)$ (différence ensembliste).

La v.a. S se met alors sous la forme suivante d'une somme de deux v.a. indépendantes :

$$S(b, c ; a) = \mathrm{card}\,[E(b) \cap Z(a)] + \mathrm{card}\,[E(b) \cap Z(\bar{a})] \quad ,(2).$$

Il est facile de se rendre compte que la première (resp. seconde) v.a. est hypergéométrique de paramètres $[n(a), n(a\wedge b), n(a\wedge c)]$ (resp. $[n(\bar{a}), n(\bar{a}\wedge b), n(\bar{a}\wedge c)]$). De façon précise, on a

$$Pr\{N(a\wedge b\wedge z(a)) = l\} = \binom{n(a\wedge b)}{l}\binom{n(a\wedge \bar{b})}{n(a\wedge c)-l}\bigg/\binom{n(a)}{n(a\wedge c)}, \qquad (3)$$

et

$$Pr\{N(\bar{a}\wedge b\wedge z(\bar{a})) = m\} = \binom{n(\bar{a}\wedge b)}{m}\binom{n(\bar{a}\wedge \bar{b})}{n(\bar{a}\wedge c)-m}\bigg/\binom{n(\bar{a})}{n(\bar{a}\wedge c)} \qquad (4)$$

où nous avons noté $N(a\wedge b\wedge z(a))$ (resp. $N(\bar{a}\wedge b\wedge z(\bar{a}))$) la première (resp. seconde) des deux v.a. ; d'autre part, une expression de la forme $n(\bar{a})$ indique $\mathrm{card}\,[E(\bar{a})]$ et une expression de la forme $n(\bar{a}\wedge b)$, card $[E(\bar{a}) \cap E(b)]$.

On peut certes sans difficulté donner l'expression de la loi de la v.a. $S(b,c\,;a)$ sous la forme de celle d'une somme de deux v.a. entières indépendantes. Mais nous préférons aller droit au but en calculant les expressions de la moyenne et de la variance de la v.a. $S(b,c\,;a)$.

2. MOYENNE ET VARIANCE DE LA V.A. $S(b,c\,;a)$.

On a

$$\mathcal{E}(N(a \wedge b \wedge z(a))) = n(a) \times \frac{n(a\wedge b)}{n(a)} \times \frac{n(a\wedge c)}{n(a)}$$

$$= n\, p(a\wedge b)\, p(a\wedge c)/p(a) \qquad (5)$$

où $p(a)$, $p(a\wedge b)$ et $p(a\wedge c)$ désignent respectivement les proportions $n(a)/n$, $n(a\wedge b)/n$ et $n(a\wedge c)/n$.

De même,

$$\mathcal{E}(N(\bar{a} \wedge b \wedge z(\bar{a}))) = n(\bar{a}) \times \frac{n(\bar{a}\wedge b)}{n(\bar{a})} \times \frac{n(\bar{a}\wedge c)}{n(\bar{a})}$$

$$= n\, p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge c)/p(\bar{a}) . \qquad (6)$$

avec des notations analogues à ci-dessus.

D'autre part,

$$Var(N(a \wedge b \wedge z(a))) = \frac{n(a)^2}{[n(a)-1]} \times \frac{n(a\wedge b)}{n(a)} \times \frac{n(a\wedge \bar{b})}{n(a)} \times \frac{n(a\wedge c)}{n(a)} \times \frac{n(a\wedge \bar{c})}{n(a)}$$

$$\simeq n\, p(a\wedge b)\, p(a\wedge \bar{b})\, p(a\wedge c)\, p(a\wedge \bar{c})/(p(a))^3 \, . \qquad (7)$$

et de même,

$$Var(N(\bar{a}\wedge b\wedge \tau(\bar{a}))) \simeq n\, p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge \bar{b})\, p(\bar{a}\wedge c)\, p(\bar{a}\wedge \bar{c}) / (p(\bar{a}))^3 .$$

D'où la proposition : (8)

PROPOSITION 1 – L'indice "centré réduit", représentant le coefficient d'association partielle entre les deux attributs b et c, relativement à a : $\rho_{bc.a}$ s'exprime par

$$\frac{\sqrt{n}\left[p(b\wedge c) - \left(\frac{p(a\wedge b)\,p(a\wedge c)}{p(a)} + \frac{p(\bar{a}\wedge b)\,p(\bar{a}\wedge c)}{p(\bar{a})}\right)\right]}{\sqrt{\frac{p(a\wedge b)\,p(a\wedge \bar{b})\,p(a\wedge c)\,p(a\wedge \bar{c})}{p(a)^3} + \frac{p(\bar{a}\wedge b)\,p(\bar{a}\wedge \bar{b})\,p(\bar{a}\wedge c)\,p(\bar{a}\wedge \bar{c})}{p(\bar{a})^3}}}$$

(9)

Il est naturel de chercher à rapprocher l'expression qu'on vient de trouver pour l'indice $\rho_{bc.a}$ avec celle :

$$\frac{\rho_{bc} - \rho_{ab}\,\rho_{ac}}{\sqrt{(1-\rho_{ab}^2)(1-\rho_{ac}^2)}} \qquad (10)$$

qu'on aurait obtenue en procédant par analogie directe entre le cas où les variables sont numériques et celui qui nous occupe ici. Nous allons en effet nous rendre compte que le numérateur de l'indice (9) trouvé, se met, dans le cadre de l'h.a.l. considérée, à un coefficient multiplicatif près, sous la forme $(\rho_{bc} - \rho_{ab}\rho_{ac})$. Cependant, on n'a pas une propriété analogue de rapprochement en ce qui concerne le dénominateur.

Nous allons pour effectuer le calcul partir du numérateur de l'expression (10) qu'on cherchera à réduire au numérateur de l'expression (9).

Commençons par rappeler les formules :

$$\rho_{bc} = \frac{[p(b\wedge c) - p(b)\,p(c)]}{\sqrt{p(b)\,p(c)\,p(\bar{b})\,p(\bar{c})}}, \quad \rho_{ab} = \frac{[p(a\wedge b) - p(a)\,p(b)]}{\sqrt{p(a)\,p(b)\,p(\bar{a})\,p(\bar{b})}}$$

et
$$\rho_{ac} = \frac{[p(a\wedge c) - p(a)\,p(c)]}{\sqrt{p(a)\,p(c)\,p(\bar{a})\,p(\bar{c})}} \; . \qquad (11)$$

On a

$$\rho_{bc} - \rho_{ab}\,\rho_{ac} = \frac{1}{\sqrt{p(b)\,p(\bar{b})\,p(c)\,p(\bar{c})}} \Big\{ [p(b\wedge c) - p(b)\,p(c)]$$
$$- \frac{1}{p(a)\,p(\bar{a})}[p(a\wedge b) - p(a)\,p(b)][p(a\wedge c) - p(a)\,p(c)]\Big\}, (12).$$

On développe le produit des contenus des deux crochets sous le signe accolade et on obtient :

$$p(a\wedge b)\,p(a\wedge c) - p(a)\,p(c)\,p(a\wedge b) - p(a)\,p(b)\,p(a\wedge c)$$
$$+ (p(a))^2\,p(b)\,p(c)$$

cette expression peut également s'écrire sous la forme

$$p(a\wedge b)\,p(a\wedge c) - p(a)\,p(c)\,p(a\wedge b) + p(a)\,p(b)\,p(\bar{a}\wedge c)$$
$$- p(a)\,p(b)\,p(c) + p(a)^2\,p(b)\,p(c)$$

$$= p(a\wedge b)\,p(a\wedge c) - p(a)\,p(c)\,p(a\wedge b) + p(a)\,p(b)\,p(\bar{a}\wedge c)$$
$$- p(a)\,p(\bar{a})\,p(b)\,p(c)$$

$$= p(\bar{a})\,p(a\wedge b)\,p(a\wedge c) + p(a)\,p(a\wedge b)\,p(a\wedge c)$$
$$- p(a)\,p(c)\,p(a\wedge b) + p(a)\,p(b)\,p(\bar{a}\wedge c)$$
$$- p(a)\,p(\bar{a})\,p(b)\,p(c)$$

$$= p(\bar{a})\, p(a\wedge b)\, p(a\wedge c) + p(a)\, [\, p(a\wedge b)\, p(a\wedge c) - p(c)\, p(a\wedge b) + p(a\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge c) + p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge c)\,] - p(a)\, p(\bar{a})\, p(b)\, p(c) \quad ,$$

or l'intérieur du crochet peut se mettre sous la forme

$$p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge c) + p(a\wedge b)\, [\, p(a\wedge c) + p(\bar{a}\wedge c) - p(c)\,]$$
$$= p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge c)$$

Finalement, on peut donner la forme suivante au produit développé :

$$p(\bar{a})\, p(a\wedge b)\, p(a\wedge c) + p(a)\, p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge c) - p(a)\, p(\bar{a})\, p(b)\, p(c).$$

Il en résulte que l'expression (12) se met sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{p(b)\, p(\bar{b})\, p(c)\, p(\bar{c})}} \left\{ p(b\wedge c) - \left(\frac{p(a\wedge b)\, p(a\wedge c)}{p(a)} + \frac{p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge c)}{p(\bar{a})} \right) \right\} \qquad (13)$$

Ainsi, le numérateur de notre indice $\rho_{bc.a}$ peut s'écrire :

$$\text{num.}\,(\rho_{bc.a}) = \sqrt{n}\ \sqrt{p(b)\, p(\bar{b})\, p(c)\, p(\bar{c})}\ [\, \rho_{bc} - \rho_{ab}\, \rho_{ac}\,] \ , (14)$$

Par conséquent

$$\frac{\rho_{bc.a}}{(\rho_{bc} - \rho_{ab}\, \rho_{ac})} = \left\{ \frac{n\, p(b)\, p(\bar{b})\, p(c)\, p(\bar{c})}{\dfrac{p(a\wedge b)\, p(a\wedge \bar{b})\, p(a\wedge c)\, p(a\wedge \bar{c})}{p(a)^3} + \dfrac{p(\bar{a}\wedge b)\, p(\bar{a}\wedge \bar{b})\, p(\bar{a}\wedge c)\, p(\bar{a}\wedge \bar{c})}{p(\bar{a})^3}} \right\}^{\frac{1}{2}} , \qquad (15)$$

qu'on est tenté de vouloir rapprocher de l'expression

$$1 \Big/ \sqrt{(1-\rho_{ab}^2)(1-\rho_{ac}^2)} \quad , (16).$$

Or le contre exemple numérique suivant montre qu'il faut renoncer à ce rapprochement formel où il y a lieu, comme dans le cas total, d'ignorer le coefficient $\sqrt{n}$.

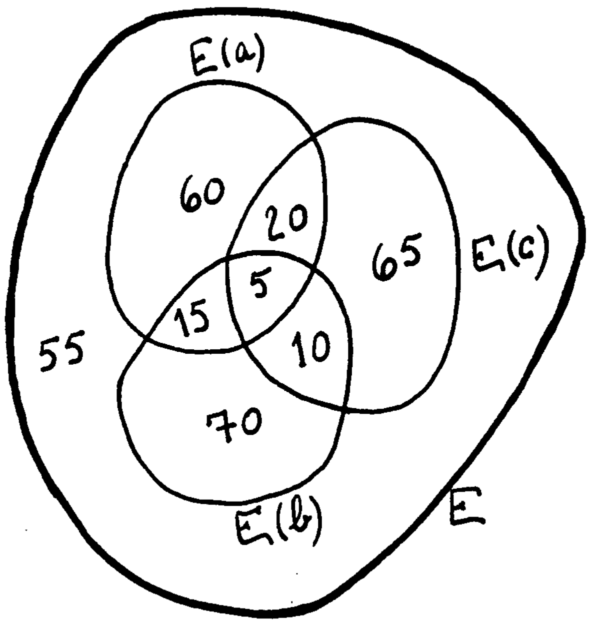

figure 3.

Dans la situation schématisée ci-dessus où nous avons fait porter les cardinaux des différents sous ensembles résultant d'intersections, on a

$p(a) = 1/3$, $p(\bar{a}) = 2/3$, $p(b) = 1/3$, $p(\bar{b}) = 2/3$,

$p(c) = 1/3$, $p(\bar{c}) = 2/3$,

$p(a \wedge b) = 20/300 = 1/15$, $p(a \wedge \bar{b}) = 80/300 = 4/15$

$p(\bar{a} \wedge b) = 80/300 = 4/15$, $p(\bar{a} \wedge \bar{b}) = 120/300 = 2/5$

$p(a \wedge c) = 25/300 = 1/12$, $p(a \wedge \bar{c}) = 75/300 = 1/4$

$p(\bar{a} \wedge c) = 75/300 = 1/4$, $p(\bar{a} \wedge \bar{c}) = 125/300 = 5/12$

Pour comparer les expressions (15) et (16) on est vite conduit à vérifier l'égalité des deux expressions suivantes qui en résultent respectivement :

$$\frac{p(a\wedge b)\,p(a\wedge\bar b)\,p(a\wedge c)\,p(a\wedge\bar c)}{p(a)^3} + \frac{p(\bar a\wedge b)\,p(\bar a\wedge\bar b)\,p(\bar a\wedge c)\,p(\bar a\wedge\bar c)}{p(\bar a)^3} \qquad (15')$$

et

$$\left\{ p(b)p(\bar b) - \frac{[p(a\wedge b) - p(a)p(b)]^2}{p(a)\,p(\bar a)} \right\}$$
$$\times \left\{ p(c)p(\bar c) - \frac{[p(a\wedge c) - p(a)p(c)]^2}{p(a)\,p(\bar a)} \right\} \qquad (16').$$

Calcul effectué, on obtient pour (15') dans le cadre de l'exemple numérique la valeur de 0,0475. Alors que pour (16') on obtient 0,04666... D'où le résultat :

PROPOSITION 2 - Le coefficient d'association partielle entre les deux attributs b et c, relativement à l'attribut a, peut se mettre à un coefficient près qui ne dépend que des liens entre a et b d'une part, a et c d'autre part, sous la forme $(\rho_{bc} - \rho_{ab}\rho_{ac})$. Ce coefficient (15) ci-dessus ne se réduit pas (au facteur $\sqrt{n}$) comme dans le cas linéaire et numérique au coefficient (16) ci-dessus.

Enfin, compte tenu de la manière dont il a été construit, le comportement asymptotique de l'indice (9) ci-dessus dans l'h.a.l. est celui d'une v.a. normale centrée réduite.

III COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX VARIABLES NUMERIQUES PARTIELLE, RELATIVEMENT A UN ATTRIBUT OU A UNE VARIABLE QUALITATIVE NOMINALE.

III.A - CAS OÙ LA LIAISON EST CONDITIONNEE PAR UN ATTRIBUT.

1. INDICE BRUT ET H.A.L.

$I = \{1,2,\ldots,i,\ldots,n\}$ désignera l'ensemble d'indexation de l'ensemble E des individus.

$\{v(i)/i \in I\}$ (resp. $\{w(i)/i \in I\}$) désignera la suite des valeurs de la première (resp. seconde) variable numérique. On note a l'attribut de description dont il s'agit de neutraliser l'influence dans la comparaison entre v et w ; $a(i) = 1$ (resp. 0) si l'attribut est présent (resp. absent) chez l'individu codé i. On indiquera par $I(a)$ (resp. $I(\bar{a})$) l'ensemble des indices des sujets possédant (resp. ne possédant pas) l'attribut a ; on note ainsi $\bar{a}$ l'attribut opposé à a.

Comme dans le cas total l'indice brut de proximité se met sous la forme

$$\sum \{ v(i)w(i) / i \in I \} \qquad (1)$$

qui, ici, peut se décomposer comme suit :

$$\sum \{ v(i)w(i) / i \in I(a) \} + \sum \{ v(i)w(i) / i \in I(\bar{a}) \} \qquad (2)$$

$$= \sum_{i \in I} v(i)w(i)a(i) + \sum v(i)w(i)\bar{a}(i) \; . \qquad (3)$$

Nous avons pu mettre en évidence que pour passer du cas discret au cas quantitatif dans l'élaboration de l'hypothèse d'absence de lien, il y avait lieu de substituer à l'expression ensembliste, une expression permutationnelle [LERMAN (1976)] ; alors que dans le cas discret l'élément aléatoire est un ensemble, il s'agira dans le cas numérique d'une permutation.

La permutation aléatoire qu'il s'agit de construire ici doit être telle que les positions relatives entre v et a d'une part, w et a d'autre part, soient préservées.

En d'autres termes, la suite des quatre quantités suivantes doit être invariante après avoir opéré sur I une telle permutation.

$\{\sum a(i)v(i), \sum \bar{a}(i)v(i), \sum a(i)w(i), \sum \bar{a}(i)w(i) \,/\, i \in I\}$ (4)

La permutation σ cherchée sera par conséquent formée d'un couple $(\sigma_a, \sigma_{\bar{a}})$ de deux permutations aléatoires indépendantes, où σ_a (resp. $\sigma_{\bar{a}}$) est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, des permutations sur $I(a)$ (resp. $I(\bar{a})$).

On pourra facilement montrer que, comme dans le cas total, les deux v.a. duales suivantes associées à l'indice brut (1), sont de même loi :

$$X(v,w') = \sum \{v(i)w[\sigma(i)] \,/\, i \in I\}$$

$$\text{et } X(v',w) = \sum \{v[\sigma(i)]w(i) \,/\, i \in I\} \quad (5).$$

Reprenons la première des deux v.a., elle peut se mettre sous la forme :

$$X(v,w') = \sum \{v(i)w[\sigma_a(i)] \,/\, i \in I(a)\}$$
$$+ \sum \{v(i)w[\sigma_{\bar{a}}(i)] \,/\, i \in I(\bar{a})\} \quad (6)$$

2 – MOYENNE ET VARIANCE DE LA V.A. $X(v,w')$.

Les deux permutations aléatoires σ_a et $\sigma_{\bar{a}}$ étant indépendantes, $X(v,w')$ se présente sous la forme d'une somme de deux v.a. indépendantes qu'on peut d'ailleurs noter $X(v,w'_a)$ et $X(v,w'_{\bar{a}})$. On a

$$\mathcal{E}[X(v,w'_a)] = \sum_{i \in I(a)} v(i)\, \mathcal{E}\{w[\sigma_a(i)]\} \quad (7)$$

mais, pour tout i,

$$\mathcal{E}\{w[\sigma_a(i)]\} = \frac{1}{n(a)} \sum_{i' \in I(a)} w(i') \quad (8)$$

Par conséquent,

$$\mathcal{E}[X(v,w'_a)] = n(a) \times [\frac{1}{n(a)} \sum_{i\in I(a)} v(i)] \times [\frac{1}{n(a)} \sum_{i\in I(a)} w(i)]$$

$$= n(a)\,\mu_a(v)\,\mu_a(w)\ ; \qquad (9)$$

où, on le comprend, $\mu_a(v)$ (resp. $\mu_a(w)$) représente la moyenne sur $I(a)$ de la variable numérique v (resp. w).

De même,

$$\mathcal{E}[X(v,w'_{\bar{a}})] = n(\bar{a})\,\mu_{\bar{a}}(v)\,\mu_{\bar{a}}(w)\ , \qquad (10)$$

où $\mu_{\bar{a}}(v)$ (resp. $\mu_{\bar{a}}(w)$) représente la moyenne sur $I(\bar{a})$ de la variable numérique v (resp. w).

Finalement,

$$\mathcal{E}[X(v,w')] = n(a)\,\mu_a(v)\,\mu_a(w) + n(\bar{a})\,\mu_{\bar{a}}(v)\,\mu_{\bar{a}}(w). \qquad (11)$$

Compte tenu de relations de la forme

$$\sum_{i\in I} v(i)w(i) = n\ cov(v,w) + n\,\mu(v)\,\mu(w)$$

et $$\sum_{i\in I(a)} v(i) = \sum_{i\in I} a(i)\,v(i)\ ,$$

l'indice centré peut s'écrire comme suit

$$n\,cov(v,w) + n\,\mu(v)\mu(w) - \frac{1}{n(a)}[n\,cov(a,v) + n(a)\,\mu(v)] \times [n\,cov(a,w) + n(a)\,\mu(w)]$$

$$- \frac{1}{n(\bar{a})}[n\,cov(\bar{a},v) + n(\bar{a})\,\mu(v)][n\,cov(\bar{a},w) + n(\bar{a})\,\mu(w)]\ .$$

En développant cette expression et en tenant compte des relations de type $cov(\bar{a},v) = -\,cov(a,v)$ et $n(a) + n(\bar{a}) = n$, on obtient le résultat suivant

$$n\,cov(v,w) - n^2\left(\frac{1}{n(a)} + \frac{1}{n(\bar{a})}\right) cov(a,v)\,cov(a,w)$$

$$= n\left[cov(v,w) - \frac{1}{p(a)\,p(\bar{a})}\,cov(a,v)\,cov(a,w)\right]\ ,$$

où $p(a) = n(a)/n$ (resp. $p(\bar{a}) = n(\bar{a})/n$),

$$= n\, s(v)\, s(w)\, [\rho(v,w) - \rho(a,v)\rho(a,w)] \ , \qquad (12)$$

où $s^2(v)$ (resp. $s^2(w)$) désigne la variance sur I de la variable numérique v (resp. w) et où $\rho(a,v)$ (resp. $\rho(a,$ et $\rho(v,w)$) désigne le coefficient de corrélation entre a et v (resp. entre a et w et entre v et w). Ainsi

$$\rho(a,v) = \frac{\mathrm{cov}(a,v)}{\sqrt{\mathrm{var}(a)\,\mathrm{var}(v)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n} a(i)v(i) - p(a)\,\mu(v)}{\sqrt{p(a)\,p(\bar{a})\ s^2(v)}} \ . \qquad (13)$$

Pour le calcul de la variance, commençons par rappeler que si τ est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniforme, de toutes les permutations sur I, la variance d'une v.a. de la forme $\sum\{\xi_i \eta_{\sigma(i)} / i \in I\}$ s'écrit $(n^2/(n-1))\,\mathrm{var}(\xi)\,\mathrm{var}(\eta)$. Dans ces conditions et en tenant compte de la nature de la variable a, on peut écrire

$$\mathrm{var}[X(v,w'_a)] = \frac{n(a)^2}{[n(a)-1]}\{\frac{1}{n(a)}\sum_{i\in I} v^2(i)\,a^2(i) - [\frac{1}{n(a)}\sum_{i\in I} v(i)\,a(i)]^2\}\{\frac{1}{n(a)}\sum_{i\in I} w^2(i)\,a^2(i) - [\frac{1}{n(a)}\sum_{i\in I} w(i)\,a(i)]^2\} \ , \qquad (14)$$

$$\mathrm{var}[X(v,w'_{\bar{a}})] = \frac{n(\bar{a})^2}{[n(\bar{a})-1]}\{\frac{1}{n(\bar{a})}\sum_{i\in I} v^2(i)\,[1-a^2(i)] - (\frac{1}{n(\bar{a})}\sum_{i\in I} v(i)\,[1-a(i)])^2\}\{\frac{1}{n(\bar{a})}\sum_{i\in I} w^2(i)\,[1-a^2(i)] - (\frac{1}{n(\bar{a})}\sum_{i\in I} w(i)\,[1-a(i)])^2\} \ . \qquad (15)$$

Ici encore, il est tentant de chercher à rapprocher l'expression de notre indice d'association partielle avec celui qu'on aurait obtenu dans le cas linéaire et numérique (cf. formule (10), § II ci-dessus).

Compte tenu de la formule (12) ci-dessus, il y a lieu de comparer

$$\{ \operatorname{var}[X(v, w'_a)] + \operatorname{var}[X(v, w'_{\bar{a}})] \} / n\, s^2(v)\, s^2(w) \qquad (16)$$

avec

$$[1 - \rho^2(a,v)]\,[1 - \rho^2(a,w)] \qquad (17)$$

où, rappelons le ici, une expression de type $\rho(a,v)$ peut prendre la forme $[\mu(a \wedge v) - p(a)\mu(v)] / \sqrt{p(a)\, p(\bar{a})\, \mu(v)\, \mu(\bar{v})}$.

L'exemple considéré dans le cas où v et w sont des attributs (cf. paragraphe précédent) montre déjà que le rapprochement formel entre les expressions (16) et (17) ne peut aller jusqu'à l'identification. En effet, la situation considérée ici peut apparaître comme une généralisation du cas précédent qu'on retrouverait ici en supposant que les deux variables v et w ne sont susceptibles de prendre que les deux valeurs 0 et 1.

Nous allons néanmoins chercher à rapprocher au mieux les expressions de (16) et de (17), ce qui nous permettra de nous rendre compte de leur différence formelle. Pour ce calcul, on supposera sans restreindre la généralité que les variables v et w sont centrées réduites.

Dans ces conditions (17) peut se mettre sous la forme

$$[p(a)p(\bar{a}) - (\tfrac{1}{n}\langle a, v\rangle)^2][p(a)p(\bar{a}) - (\tfrac{1}{n}\langle a, w\rangle)^2] / [p(a)\, p(\bar{a})]^2, \qquad (18).$$

où on a noté $\langle a, v\rangle$ une expression du type $\Sigma \{ a_i v_i / i \in I \}$. Alors que l'expression (16) ne peut se réduire qu'à la forme suivante

$$\frac{1}{[p(a)\,p(\bar{a})]^2} \Big\{ \frac{(p(\bar{a}))^2}{p(a)} \times [p(a) \times \tfrac{1}{n}\langle a^2, v^2\rangle - (\tfrac{1}{n}\langle a, v\rangle)^2] \times [p(a) \times \tfrac{1}{n}\langle a^2, w^2\rangle - (\tfrac{1}{n}\langle a, w\rangle)^2]$$
$$+ \frac{(p(a))^2}{p(\bar{a})} \times [p(\bar{a})(1 - \tfrac{1}{n}\langle a^2, v^2\rangle) - (\tfrac{1}{n}\langle a, v\rangle)^2] \times [p(\bar{a})(1 - \tfrac{1}{n}\langle a^2, w^2\rangle) - (\tfrac{1}{n}\langle a, w\rangle)^2] \Big\}; \qquad (19)$$

où on a noté $<a^2, v^2>$ une expression de type $\sum_i \{a_i^2 v_i^2 / i \in I\}$ qui est nécessairement inférieure à n.

PROPOSITION – Le coefficient d'association partielle entre les deux variables numériques v et w, relativement à l'attribut a, peut se mettre à un coefficient multiplicatif près qui ne dépend que des liens entre a et v d'une part, a et w d'autre part, sous la forme $(\rho_{vw} - \rho_{av}\rho_{aw})$. Ce coefficient dont le carré est défini par l'expression (16), ne peut se réduire à $\sqrt{(1-\rho_{av}^2)(1-\rho_{aw}^2)}$ (cf. formules (18) et (19) ci-dessus).

D'autre part, dans l'h.a.l. à caractère permutationnel, le comportement asymptotique de l'indice est celui d'une v.a. centrée réduite.

La dernière assertion de cette proposition résulte de l'application du théorème de Wald, Wolfowitz et Nœther [WALD & WOLFOWITZ (1944)], [NŒTHER (1949)].

III.B – CAS OÙ LA LIAISON EST CONDITIONNEE PAR UNE VARIABLE QUALITATIVE NOMINALE.

INDICE BRUT ET H.A.L.

Ce cas est une généralisation naturelle du cas précédent. Désignons par $a^1, a^2, \ldots, a^j, \ldots, a^J$, les attributs-modalités de la variable qualitative a dont il s'agit de neutraliser l'influence dans la comparaison entre deux variables quantitatives numériques v et w. On a, pour tout individu x, $a^j(x) = 1$ (resp. 0) selon que x possède (resp. ne possède pas) la modalité a^j du caractère ; n notera I_j l'ensemble des indices des sujets possédant la modalité a^j, $1 \leq j \leq J$.

Comme dans le cas total, l'indice brut de proximité se met sous la forme

$$\sum \{ v(i)w(i) / i \in I \} \qquad (1)$$

et les deux v.a. duales, respectivement, sous la forme

$$\sum \{ v(i)w[\sigma(i)] / i \in I \} , \sum \{ v[\tau(i)]w(i) / i \in I \} \qquad (2)$$

où σ (resp. τ) est un élément aléatoire d'un espace probabilisé de permutations, judicieusement choisi.

En effet, l'h.a.l. à caractère permutationnel doit préserver les positions relatives des deux variables sur chaque I_j, $1 \leq j \leq J$. Dans ces conditions, décomposons l'expression (1) de l'indice brut comme suit

$$\sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{i \in I_j} v(i)w(i) \qquad (3)$$

Relativement à l'une ou à l'autre des deux v.a. duales (cf. (2)), on peut par exemple prendre la première, σ doit être choisie comme une suite $(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^j, \ldots, \sigma^J)$ de J permutations aléatoires indépendantes, où σ^j est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniforme, de toutes les permutations sur I_j, $1 \leq j \leq J$. Ainsi, la première v.a. de (2) se met sous la forme

$$\sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{i \in I_j} v(i)w[\sigma^j(i)] \quad . \qquad (4)$$

C'est sans aucune difficulté qu'on voit que la distribution de la deuxième v.a. :

$$\sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{i \in I_j} v[\tau^j(i)]\, w(i) \qquad (5)$$

est, avec une définition correspondante de $(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^j, \ldots, \tau^J)$, la même que celle de la première.

Les calculs de la moyenne et de la variance de la somme (4) de v.a. indépendantes sont en tout point semblables à ceux du paragraphe III.A précédent. Pour ce qui est de la moyenne, on obtient

$$\mathcal{E}(X(v,w')) = \sum_{1\leq j\leq J} n(a^j)\,\mu_{a^j}(v)\,\mu_{a^j}(w) \qquad (6)$$

où $X(v,w')$ désigne la v.a. (4), $n(a^j)$ le cardinal de I_j et $\mu_{a^j}(v)$ (resp. $\mu_{a^j}(w)$) la moyenne sur I_j de la variable v (resp. w).

L'indice centré peut se mettre sous la forme

$$n\,\mathrm{cov}(v,w) + n\mu(v)\mu(w) - \sum_{1\leq j\leq J}\frac{1}{n(a^j)}[n\,\mathrm{cov}(a^j,v) + n(a^j)\mu(v)]\times[n\,\mathrm{cov}(a^j,w) + n(a^j)\mu(w)] \qquad (7)$$

En tenant compte des deux relations suivantes :

$$\sum_{1\leq j\leq J} n(a^j) = n$$

$$\sum_{1\leq j\leq J} n\,\mathrm{cov}(a^j,v) = \sum_{1\leq j\leq J} n\,\mathrm{cov}(a^j,w) = 0\,,$$

l'expression (7) peut se réduire à

$$n\,s(v)\,s(w)\{\rho(v,w) - \sum_{1\leq j\leq J}[1-p(a^j)]\,\rho(a^j,v)\,\rho(a^j,w)\}. \qquad (8)$$

Nous laissons maintenant le soin au lecteur intéressé d'effectuer le calcul sans difficulté de la variance de la v.a. $X(v,w')$ et de conclure par une proposition analogue à celle qui termine le paragraphe III.A précédent.

IV - COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX VARIABLES QUALITATIVES NOMINALES, PARTIELLE RELATIVEMENT A UNE TROISIEME VARIABLE QUALITATIVE NOMINALE.

IV.1 – cas d'un indice d'association conforme à la statistique du χ^2.

Nous désignerons par β et γ les deux variables partitions dont il s'agit de mesurer le lien en neutralisant l'effet d'une troisième variable partition α. Les partitions P, Q et R respectivement induites par α, β et γ sur l'ensemble E des objets de cardinal n (défini par l'échantillon étudié) seront désignées comme suit:

$$P = \{E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_I\}$$
$$Q = \{F_1, F_2, \ldots, F_j, \ldots, F_J\} \qquad (1)$$
et $$R = \{G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots, G_K\}.$$

Nous noterons également $n(i) = \text{card}(E_i)$, $n(j) = \text{card}(F_j)$, $n(k) = \text{card}(G_k)$, $p(i) = n(i)/n$, $p(j) = n(j)/n$ et $p(k) = n(k)/n$, $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J$ et $1 \leqslant k \leqslant K$.

La position relative entre deux partitions est déterminée par le tableau de contingence de leur croisement. Dans ces conditions, on aura à considérer les trois tableaux de contingence suivants, respectivement associés à $P \wedge Q$, à $P \wedge R$ et à $Q \wedge R$:

$$n(P \wedge Q) = \{ n(i \wedge j) / 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J\}$$
$$n(P \wedge R) = \{ n(i \wedge k) / 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K\} \qquad (2)$$
$$n(Q \wedge R) = \{ n(j \wedge k) / 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K\}$$

où $n(i \wedge j) = \text{card}(E_i \cap F_j)$, $n(i \wedge k) = \text{card}(E_i \cap G_k)$ et $n(j \wedge k) = \text{card}(F_j \cap G_k)$, $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J$, $1 \leqslant k \leqslant K$.

On aura également à nous exprimer par rapport aux tableaux des proportions

$$p(P \wedge Q) = \{ p(i \wedge j) / 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J\}$$
$$p(P \wedge R) = \{ p(i \wedge k) / 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K\}$$

et $\quad p(Q \wedge R) = \{p(j \wedge k) / 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K\}$. $\quad$ (3)

où $p(i \wedge j) = n(i \wedge j)/n$, $p(i \wedge k) = n(i \wedge k)/n$ et $p(j \wedge k) = n(j \wedge k)/n$; $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$ et $1 \leq k \leq K$.

Nous noterons enfin $\chi^2_{\beta\gamma.\alpha}$ l'indice d'association partielle cherché.

Nous allons procéder par analogie avec une certaine interprétation du cas total dans la comparaison entre les deux variables partitions β et γ. Du point de vue de l'étude distributionnelle, on suppose qu'on fixe les marges de la table de contingence de croisement entre les deux partitions Q et R ; ce cas est celui où les paramètres déterminant la distribution dans l'h.a.l. des contenus des cases, sont estimés à partir des marges.

Dans le cas total on peut considérer qu'à chaque couple de parties (F_j, G_k) de E, on associe, conformément à l'h.a.l. N_3 (cf. Introduction), un couple de parties aléatoires indépendantes (F_j^*, G_k^*), $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$. Sous une telle hypothèse, chacune des v.a. $N(j \wedge k) = \mathrm{card}\,(F_j^* \cap G_k^*)$ est une v.a. de Poisson de paramètre $n\,p(j)\,p(k)$, $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$ [LERMAN (1980)].

La suite des v.a. $\{[N(j \wedge k) - n\,p(j)\,p(k)] / \sqrt{n\,p(j)\,p(k)} / 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K\}$ se comporte asymptotiquement comme une suite de v.a. normales centrées réduites. La somme de leurs carrés est asymptotiquement une v.a. du χ^2 à $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté, puisque les paramètres sont estimés à partir des marges ou, ce qui revient au même, en vertu des relations :

$$\sum_{1 \leq j \leq J} [n(j \wedge k) - n\,p(j)\,p(k)] = 0$$

$$\sum_{1 \leq k \leq K} [n(j \wedge k) - n\,p(j)\,p(k)] = 0 \qquad (4)$$

dont $(J+K-1)$ sont indépendantes [voir dans LANCASTER (1969)].

Dans le cas partiel qui nous intéresse, la construction va se jouer sur la manière de choisir le couple de parties aléatoires (F'_j, G'_k), $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$. Le choix doit se faire de telle façon que les positions relatives entre P et Q d'une part, P et R d'autre part, soient préservées lorsqu'on remplace la suite des parties $(F_1, F_2, \ldots, F_j, \ldots, F_J)$ (resp. $(G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots, G_K)$) par celle $(F'_1, F'_2, \ldots, F'_j, \ldots, F'_J)$ (resp. $(G'_1, G'_2, \ldots, G'_k, \ldots, G'_K)$).

En se référant aux deux décompositions suivantes

$$F_j = \sum_{1 \leq i \leq I} F_j \cap E_i \quad \text{et} \quad G_k = \sum_{1 \leq i \leq I} G_k \cap E_i \quad ,$$

$1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$, on se rend compte que dans le cas partiel, le choix global de F'_j (resp. G'_k) se fera à partir d'une suite $\{F'_{ji} \,/\, 1 \leq i \leq I\}$ (resp. $\{G'_{ki} \,/\, 1 \leq i \leq I\}$) de parties aléatoires indépendantes conformément à l'h.a.l. N_3. Les paramètres du choix de F'_{ji} (resp. G'_{ki}) sont $n(i)$ et $p(i \wedge j)/p(i)$ (resp. $n(i)$ et $p(i \wedge k)/p(i)$), $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$ et $1 \leq k \leq K$.

Dans ces conditions, la v.a. $\text{card}(F'_j \cap G'_k)$ se met sous la forme

$$\text{card}(F'_j \cap G'_k) = \text{card}\left[\left(\sum_i F'_{ji}\right) \cap \left(\sum_i G'_{ki}\right)\right]$$

(sommes ensemblistes)

$$= \sum_{1 \leq i \leq I} \text{card}(F'_{ji} \cap G'_{ki}) \qquad (5)$$

puisque le choix de F'_{ji} (resp. G'_{ki}) se fait relativement à E_i et que les différents E_i sont mutuellement disjoints.

Chacune des v.a. de la forme $\text{card}(F'_{ji} \cap G'_{ki})$ est une v.a. de Poisson de paramètre

$$\frac{n(i)\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)}{[p(i)]^2} = \frac{n\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)}{p(i)} \tag{6}$$

L'expression (5) se présente comme une somme de v.a. indépendantes de Poisson. Il s'agit donc d'une v.a. de Poisson dont le paramètre est égal à la somme des paramètres des v.a. composantes.

Dans ces conditions, l'indice "centré réduit" associé à la case (j,k) du croisement entre β et γ dans l'h.a.l. du cas partiel où l'effet de la variable α est neutralisé, se met sous la forme

$$\frac{n(j\wedge k) - \sum_{1\leqslant i\leqslant I} [n\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)/p(i)]}{\sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant I} [n\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)/p(i)]}} \tag{7}$$

$1\leqslant j\leqslant J$, $1\leqslant k\leqslant K$.

On a, ici encore, le même type de relations que (4) ci-dessus ; on peut en effet facilement vérifier que

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant j\leqslant J} \{ n(j\wedge k) - \sum_{1\leqslant i\leqslant I} [n\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)/p(i)]\} = 0 \\ &\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \{ n(j\wedge k) - \sum_{1\leqslant i\leqslant I} [n\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)/p(i)]\} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

de sorte que la somme pour $1\leqslant j\leqslant J$, $1\leqslant k\leqslant K$, des carrés des expressions (7), peut être considérée dans l'h.a.l. qu'on vient d'exprimer, comme une réalisation d'une v.a. du χ^2 à $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Dans ces conditions, l'indice $\chi^2_{\beta\gamma.\alpha}$ aura pour expression

$$\sum \left\{ \frac{\left(n(j\wedge k) - \sum_{1\leqslant i\leqslant I} [n\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)/p(i)]\right)^2}{\sum_{1\leqslant i\leqslant I} [n\, p(i\wedge j)\, p(i\wedge k)/p(i)]} \middle/ \begin{matrix} 1\leqslant j\leqslant J, \\ 1\leqslant k\leqslant K \end{matrix} \right\} \tag{9}$$

L'indépendance conditionnelle entre β et γ, relativement à α se trouve caractérisée par les relations suivantes :

$$p(j \wedge k/i) = p(j/i)\,p(k/i) \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant K. \qquad (10)$$

Ces relations se mettent aussi sous la forme

$$p(j \wedge k) = p(i \wedge j)\,p(i \wedge k)/p(i) \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant K. \qquad (11)$$

On voit immédiatement que l'indice (9) est nul dans le cas de l'indépendance conditionnelle.

Réciproquement si $\chi^2_{\beta\gamma.\alpha}$ est nul, c'est pour tout (j,k), en moyenne par rapport à la distribution $\{p(i)/1 \leqslant i \leqslant I\}$, qu'on a la relation

$$p(j \wedge k/i) = p(j/i)\,p(k/i). \qquad (12)$$

Récapitulons les résultats du présent paragraphe au moyen de l'énoncé suivant :

<u>THEOREME</u>. L'indice $\chi^2_{\beta\gamma.\alpha}$ d'association partielle entre les deux variables partitions β et γ, relativement à une troisième variable partition α, conforme à la mesure du lien définie par le χ^2, est donné par la formule (9) ci-dessus. Cet indice est nul en cas d'indépendance conditionnelle. Inversement, la nullité de cet indice implique qu'on a en moyenne par rapport à la distribution $\{p(i)/1 \leqslant i \leqslant I\}$ de α, la relation (12) pour tout (j,k).

Enfin, en supposant les marges fixées, la distribution asymptotique de $\chi^2_{\beta\gamma.\alpha}$ dans l'h.a.l. qui caractérise le cas partiel, est celle d'un χ^2 à $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté où J (resp. K) est le nombre de classes de la variable β (resp. γ).

IV.2 - cas d'un indice d'association partielle conforme à l'indice de Lerman dans le cadre d'une h.a.l. à caractère local.

1 - INDICE BRUT ET H.A.L.

Les notations sont les mêmes que celles du paragraphe IV-1 précédent, l'indice cherché ici sera désigné par $\rho_{\beta\gamma.\alpha}$.

L'indice brut est le même que dans le cas total, il prend la forme suivante

$$s(\beta,\gamma) = \operatorname{card}[\mathcal{R}(Q)\cap\mathcal{R}(R)] = \sum\left\{\tfrac{1}{2}n(j\wedge k)[n(j\wedge k)-1] \,/\, 1\leq j\leq J,\ 1\leq k\leq K\right\} \qquad (1)$$

où $\mathcal{R}(Q)$ (resp. $\mathcal{R}(R)$) est l'ensemble des paires d'objets réunies par la partition Q (resp. R) et où, rappelons le, $n(j\wedge k)$ est le cardinal de l'intersection de la j-ème classe F_j de la partition Q et de la k-ème classe G_k de la partition R.

Comme dans le cas total, on fixe l'une des deux partitions Q ou R et on associe à l'autre une partition aléatoire en montrant que la distribution de la v.a. associée à $s(\beta,\gamma)$ ne dépend pas de celle des deux partitions fixée. On travaillera avec des partitions en classes étiquetées.

Nous allons fixer la partition Q et associer à la partition R, une partition aléatoire R' notée $\{G'_k \,/\, 1\leq k\leq K\}$ où G'_k est la partie aléatoire associée à G_k, $1\leq k\leq K$, dans une h.a.l. qui préserve la position relative par rapport aux classes de la partition P. Dans ces conditions, G'_k sera défini sous la forme de la somme ensembliste

$$G'_k = \bigsqcup_{1\leq i\leq I} G'_{ki} \qquad (2)$$

pour tout $k=1,2,\ldots,K$, où $(G'_{k1},G'_{k2},\ldots,G'_{ki},\ldots,G'_{kI})$

est une suite de parties aléatoires indépendantes, G'_{ki} étant choisi de cardinal $n(i \wedge k)$, uniformément au hasard dans E_i ; en d'autres termes, G'_{ki} est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniforme, des parties de E_i de même cardinal $n(i \wedge k)$.

Dans ces conditions, la v.a. associée à $s(\beta,\gamma)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$S(\beta,\gamma') = \mathrm{card}\,[\mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{R}(R')] \quad , \text{ avec}$$

$$\mathcal{R}(R') = \bigsqcup \{ P_2(G'_k) \,/\, 1 \leq k \leq K \}$$

$$= \bigsqcup \{ \bigsqcup_{1 \leq i \leq I} P_2(G'_{ki}) + \bigsqcup_{1 \leq i < i' \leq I} G'_{ki} * G'_{ki'} \,/\, 1 \leq k \leq K \} \qquad (3)$$

où $P_2(G'_{ki})$ désigne l'ensemble des paires de deux éléments de G'_{ki} et où $G'_{ki} * G'_{ki'}$ désigne l'ensemble des paires dont l'une des composantes appartient à G'_{ki} et dont l'autre composante appartient à $G'_{ki'}$.

Désignons par φ (resp. ψ et ψ') la fonction indicatrice de $\mathcal{R}(Q)$ (resp. $\mathcal{R}(R)$ et $\mathcal{R}(R')$). Avec ces notations la v.a. $S(\beta,\gamma')$ s'exprime comme suit :

$$S(\beta,\gamma') = \bigsqcup \{ \varphi(p)\psi'(p) \,/\, p \in P_2(E) \} . \qquad (4)$$

Nous nous proposons de calculer dans le cadre de l'h.a.l. que nous venons d'exprimer ci-dessus, la moyenne et la variance de cette v.a. C'est en effet l'indice $s(\beta,\gamma)$ ainsi centré et réduit qui définira le coefficient $\rho_{\beta\gamma.\alpha}$.

Le calcul va devoir se décomposer relativement à une partition de l'ensemble $P_2(E)$ des paires (i.e. des parties à deux éléments) de E, conforme à la partition $P = \{E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_I\}$. Cette partition de $P_2(E)$, d'ailleurs sous jacente à la dernière expression (3), se met sous la forme

$$\{\{P_2(E_i)/1\leq i\leq I\},\{E_i * E_{i'}/1\leq i<i'\leq I\}\} \qquad (5)$$

où $E_i * E_{i'}$ désigne l'ensemble des parties à deux éléments dont l'une des composantes appartient à E_i et l'autre à $E_{i'}$.

2. CALCUL DE LA MOYENNE DE LA V.A. $S(\beta,\gamma';\alpha)$.

Nous aurons besoin dans ce calcul d'évaluer

$$Pr\{\Psi'(p)=1/p\in P_2(E_i)\} \qquad (6)$$

$$\mathcal{E}\{\varphi(p)/p\in P_2(E_i)\} \qquad (6')$$

$$Pr\{\Psi'(p)=1/p\in E_i * E_{i'}\} \qquad (7)$$

$$\mathcal{E}\{\varphi(p)/p\in E_i * E_{i'}\}, \qquad (7')$$

pour tout i et tout $i'\neq i$.

Désignons par R_i (resp. R'_i) la restriction de la partition R (resp. aléatoire R') à E_i ; ainsi R'_i se trouve définie par

$$R'_i=\{G'_{1i},G'_{2i},\ldots,G'_{Ki}\} \qquad (8)$$

de type $\{n(i\wedge k)/1\leq k\leq K\}$.

(6) est défini par la proportion de partitions R'_i de type fixé qui préservent les deux composantes de la paire p dans une même classe G'_{ki}, $1\leq k\leq K$. Nous ne reprendrons pas ici ce calcul (cf. [LERMAN (1973)]), pour lequel on obtient

$$Pr\{\Psi'(p)=1/p\in P_2(E_i)\}=\mathcal{E}\left\{\frac{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]}{n(i)[n(i)-1]}\Big/1\leq k\leq K\right\}, \qquad (9)$$

d'autre part,

$$\mathcal{E}\{\varphi(p)/p\in P_2(E_i)\}=\mathcal{E}\{\tfrac{1}{2}n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]/1\leq j\leq J\}. \qquad (10)$$

Cette dernière expression représente en effet le nombre de paires réunies par la partition $Q_i = \{F_{ji} \,/\, 1 \leqslant j \leqslant J\}$ qui est la restriction de Q sur E_i et dont le type est défini par $\{n(i \wedge j) / 1 \leqslant j \leqslant J\}$.

De même, on a

$$\Pr\{\Psi'(p)=1 / p \in E_i * E_{i'}\} = \sum \left\{ \frac{n(i\wedge k)}{n(i)} \times \frac{n(i'\wedge k)}{n(i')} \middle/ 1 \leqslant k \leqslant K \right\} \quad (11)$$

Il s'agit en effet de la proportion de couple de parties $(G'_{ki}, G'_{ki'})$ telles que G'_{ki} (resp. $G'_{ki'}$) comprenne la composante de p qui se trouve dans E_i (resp. $E_{i'}$).

Enfin,

$$\sum \{\varphi(p) / p \in E_i * E_{i'}\} = \sum \{n(i\wedge j)\, n(i'\wedge j) / 1 \leqslant j \leqslant J\} \quad (12)$$

Pour procéder au calcul de la moyenne, nous décomposerons dans ces conditions l'expression (4) de la v.a. sous la forme:

$$S(\beta,\gamma';\alpha) = \sum_{1\leqslant i\leqslant I} \sum \{\varphi(p)\,\Psi'(p) / p \in P_2(E_i)\}$$
$$+ \sum_{1\leqslant i<i'\leqslant I} \sum \{\varphi(p)\,\Psi'(p) / p \in E_i * E_{i'}\} \;, \quad (13)$$

de sorte que

$$\mathcal{E}[S(\beta,\gamma';\alpha)] = \sum_{1\leqslant i\leqslant I} \sum \left\{ \frac{n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]}{2\,n(i)[n(i)-1]} \middle/ 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K \right\}$$
$$+ \sum_{1\leqslant i<i'\leqslant I} \sum \left\{ \frac{n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)}{n(i)\,n(i')} \middle/ 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K \right\} \quad (14)$$

3- CALCUL DE LA VARIANCE DE LA V.A. $S(\beta,\gamma';\alpha)$

La difficulté réside dans l'évaluation du moment absolu d'ordre 2 de $S(\beta,\gamma';\alpha)$. Comme dans le cas total, nous commencerons par décomposer $S^2(\beta,\gamma';d)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} S^2(\beta,\gamma';d) = \textstyle\sum_1 & \{\varphi(p)\,\psi'(p) \,/\, p \in F\} \\ &+ \textstyle\sum_1 \{\varphi(p)\varphi(q)\psi'(p)\psi'(q) \,/\, (p,q) \in G\} \\ &+ \textstyle\sum_1 \{\varphi(p)\varphi(q)\psi'(p)\psi'(q) \,/\, (p,q) \in H\} \end{aligned} \tag{15}$$

où nous avons noté ici $F = P_2(E)$, G l'ensemble des couples de paires ayant une composante commune, de la forme $(\{x,y\}, \{x,z\})$ et H l'ensemble des couples de paires sans composante commune, de la forme $(\{x,y\}, \{z,t\})$, où des lettres différentes indiquent des objets différents. Rappelons qu'on a

$$\mathrm{card}(G) = n(n-1)(n-2) \quad \text{et} \quad \mathrm{card}(H) = n(n-1)(n-2)(n-3)/4 \tag{16}$$

Dans la situation qui nous occupe ici chacun des ensembles G et H doit lui-même être décomposé conformément à la partition (5) ci-dessus de $F = P_2(E)$. Cette partition implique pour $P_2(E) \times P_2(E)$ la décomposition suivante :

$$\left.\begin{aligned} &P_2(E) \times P_2(E) = A + B + C + D \quad \text{où} \\ &A = \Big[\sum_{1 \leq i \leq I} P_2(E_i)\Big] \times \Big[\sum_{1 \leq i' \leq I} P_2(E_{i'})\Big] \\ &B = \Big[\sum_{1 \leq i \leq I} P_2(E_i)\Big] \times \Big[\sum_{1 \leq i' < i'' \leq I} E_{i'} * E_{i''}\Big] \\ &C = \Big[\sum_{1 \leq i' < i'' \leq I} E_{i'} * E_{i''}\Big] \times \Big[\sum_{1 \leq i \leq I} P_2(E_i)\Big] \\ &D = \Big[\sum_{1 \leq i < i' \leq I} E_i * E_{i'}\Big] \times \Big[\sum_{1 \leq i'' < i''' \leq I} E_{i''} * E_{i'''}\Big] \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Il y a lieu d'affiner encore cette décomposition de telle sorte que sur l'intersection de chacun des sous ensembles de la décomposition avec G ou H, la valeur de $\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)] = Pr\{\psi'(p)\psi'(q) = 1\}$ reste constante.

On posera

$$A = A_1 + A_2$$

où

$$A_1 = \bigcup_{1 \leq i \leq I} P_2(E_i) \times P_2(E_i)$$

$$A_2 = \bigcup_{1 \leq i \neq i' \leq I} P_2(E_i) \times P_2(E_{i'})$$

$$B = B_1 + B_2 \tag{18}$$

où

$$B_1 = \bigcup_{1 \leq i \neq i' \leq I} P_2(E_i) \times (E_i * E_{i'})$$

$$B_2 = \bigcup_{1 \leq i \leq I} P_2(E_i) \times \bigcup \{E_{i'} * E_{i''} \,/\, 1 \leq i' < i'' \leq I,\ i' \neq i,\ i'' \neq i\}$$

$$C = C_1 + C_2$$

où

$$C_1 = \bigcup_{1 \leq i \neq i' \leq I} (E_i * E_{i'}) \times P_2(E_{i'})$$

$$C_2 = \bigcup_{1 \leq i' < i'' \leq I} (E_{i'} * E_{i''}) \times \bigcup \{P_2(E_i) \,/\, 1 \leq i \leq I,\ i \neq i',\ i \neq i''\}$$

$$D = D_1 + D_2$$

où

$$D_1 = \bigcup \{(E_i * E_{i'}) \times (E_{i''} * E_{i'''}) \,/\, (\{i, i'\}, \{i'', i'''\}) \in H(I)\}$$

$$D_2 = \bigcup \{(E_i * E_{i'}) \times (E_i * E_{i''}) \,/\, (\{i, i'\}, \{i, i''\}) \in G(I)\}$$

où nous avons noté $H(I)$ (resp. $G(I)$) l'ensemble des couples de paires d'indices sans (resp. avec) une composante commune.

Le calcul nécessite l'évaluation de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)]$ et de $\bigcup \varphi(p)\varphi(q)$ relativement à l'intersection avec G (resp. H) avec chacun des sous ensembles de la décomposition ci-dessus.

3.g.a1 _ calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in G \cap A_1]$.

(p,q) est un couple de paires de la forme $(\{x,y\},\{x,z\})$ où les trois objets distincts x, y et z sont dans une même classe E_i. Connaissant i, l'espérance cherchée représente la proportion de partitions $\{G'_{ki} / 1 \leq k \leq K\}$ pour lesquelles les trois objets restent réunis dans une même classe G'_{ki}. Cette proportion vaut

$$\sum_{1 \leq k \leq K} \frac{n(i \wedge k)[n(i \wedge k)-1][n(i \wedge k)-2]}{n(i)[n(i)-1][n(i)-2]} \qquad (19)$$

3.g.a.1' _ calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in G \cap A_1\}$.

Il s'agit d'une énumération ; en se cantonnant à une même classe E_i, la quantité cherchée représente le nombre de couples de paires de la forme $(\{x,y\},\{x,z\})$ pour lesquels x, y et z se trouvent réunis dans une même classe F_{ji} de la partition Q_i qui représente la restriction de la partition Q à E_i. Le nombre cherché s'écrit

$$\sum_{1 \leq j \leq J} n(i \wedge j)[n(i \wedge j)-1][n(i \wedge j)-2] \qquad (19')$$

3 g.a 2 _ calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in G \cap A_2]$.

Pour (i,i') donné avec $i' \neq i$, il est impossible d'avoir, relativement à $(p,q) = (\{x,y\},\{x,z\})$, $\{x,y\} \in P_2(E_i)$ et $\{x,z\} \in P_2(E_{i'})$. Ainsi, la proportion de partitions que définit cette espérance est nulle.

3g.a.2' _ calcul de $\sum\{\varphi(p\varphi(q) / (p,q) \in G \cap A_2\}$.

Pour la même raison que ci-dessus, ce cardinal est nul.

3g.b.1 _ calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in G \cap B_1]$

Pour (i,i') fixé et relativement au couple de paires $(p,q) = (\{x,y\},\{x,z\})$, il s'agit de la proportion de couples de partitions $(\{G'_{ki}/1\leq k\leq K\},\{G'_{ki'}/1\leq k\leq K\})$ qui d'une part, préservent x et y dans la k-ème classe de E_i et qui d'autre part, préservent z dans la k-ème classe de $E_{i'}$, $1\leq k\leq K$; cette proportion vaut par conséquent

$$\sum_{1\leq k\leq K} \frac{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\,n(i'\wedge k)}{n(i)\,[n(i)-1]\,n(i')} \qquad (20)$$

3.g.b.1'- <u>calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in G\cap B_1\}$.</u>

Pour (i,i') fixé $(i\neq i')$, il s'agit du nombre de couples de paires de la forme $(\{x,y\},\{x,z\})$ tels que d'une part, x et y appartiennent à une même classe F_{ji} et d'autre part, z appartienne à la classe $F_{ji'}$. Ce cardinal est égal à

$$\sum_{1\leq j\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i'\wedge j) \qquad (21)$$

3.g.b.2- <u>calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in G\cap B_2]$.</u>

La proportion que représente cette espérance est nulle pour une raison analogue à celle du cas 3g.a.2 ci-dessus.

3.g.b.2'- <u>calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in G\cap B_2\}$.</u>

Ce cardinal est nul.

3.g.c.1 - <u>calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in G\cap C_1]$</u>

Ce calcul est analogue en tout point à celui ci-dessus de 3.g.b.1. Le résultat est donc pour i et i' fixés $(i\neq i')$:

$$\sum_{1\leq k\leq K} \frac{n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)\,[n(i'\wedge k)-1]}{n(i)\,n(i')\,[n(i')-1]} \qquad (22)$$

3.g.c.1'- <u>calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in G\cap C_1\}$.</u>

Le calcul est analogue à celui 3.3.b.1' ci-dessus. On obtient pour (i, i') fixé $(i' \neq i)$:

$$\sum_{1 \leq j \leq J} n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j)\, [n(i' \wedge j) - 1] \qquad (23).$$

3.3.c.2 – calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in G \cap C_2]$.

La proportion que représente cette espérance est nulle.

3.3.c.2' – calcul de $\sum \{\varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in G \cap C_2\}$.

Le cardinal est nul.

3.3.d.1 – calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in G \cap D_1]$.

La proportion que représente cette espérance est nulle.

3.3.d.1' – calcul de $\sum \{\varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in G \cap D_1\}$.

Le cardinal est nul

3.3.d.2 – calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in G \cap D_2]$.

Pour i, i' et i'' fixés, il s'agit relativement au couple de paires $(\{x,y\}, \{x,z\})$, de la proportion de triplets de partitions $(\{G'_{ki} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{ki'} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{ki''} / 1 \leq k \leq K\})$ qui, respectivement, préservent les objets x, y et z dans leur k-ème classe, $1 \leq k \leq K$; cette proportion vaut par conséquent

$$\sum_{1 \leq k \leq K} \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k)\, n(i'' \wedge k)}{n(i)\, n(i')\, n(i'')} \qquad (24)$$

3.3.d.2' – calcul de $\sum \{\varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in G \cap D_2\}$.

i, i' et i'' étant fixés, il s'agit du nombre de couples de paires $(\{x,y\}, \{x,z\})$ tels que pour un même j, $x \in F_{ji}$, $y \in F_{ji'}$ et $z \in F_{ji''}$. Le cardinal cherché est donc égal à

$$\sum_{1 \leq j \leq J} n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j)\, n(i'' \wedge j) \qquad (25)$$

3.h.a.1 - calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H\cap A_1]$.

Pour i fixé et relativement à un couple de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$, il s'agit de la somme de deux proportions de partitions $\{G'_{ki}/1\leq k\leq K\}$; celles qui regroupent dans une même classe les quatre objets distincts x,y,z et t et celles qui regroupent les deux premiers objets x et y dans une classe k et les deux derniers objets z et t dans une classe $k'\neq k$. La proportion globale vaut :

$$\Big\{\sum_{1\leq k\leq K} n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1][n(i\wedge k)-2][n(i\wedge k)-3] + \sum_{1\leq k\neq k'\leq K} n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\,n(i\wedge k')[n(i\wedge k')-1]\Big\} \Big/ n(i)[n(i)-1][n(i)-2][n(i)-3]\,. \qquad (26)$$

3.h.a.1' - calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in H\cap A_1\}$.

En se cantonnant à une même classe E_i, le cardinal cherché est la somme de deux nombres ; celui de couples de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$ pour lesquels les quatre objets distincts composants se retrouvent dans une même classe F_{ji} de la partition $\{F_{ji}/1\leq j\leq J\}$ et celui pour lesquels $\{x,y\}$ est incluse dans une classe F_{ji} et $\{z,t\}$, dans une classe $F_{j'i}$ pour $j'\neq j$. Ce cardinal vaut:

$$\frac{1}{4}\Big\{\sum_{1\leq j\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1][n(i\wedge j)-2][n(i\wedge j)-3] + \sum_{1\leq j\neq j'\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i\wedge j')[n(i\wedge j')-1]\Big\}. \qquad (27)$$

3.h.a.2 - calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H\cap A_2]$.

Pour (i,i') fixé et relativement à un couple de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$, il s'agit de la proportion de couples de partitions $(\{G'_{ki}/1\leq k\leq K\},\{G'_{ki'}/1\leq k\leq K\})$ qui, respectivement, préservent la paire $\{x,y\}$ pour l'une, $\{z,t\}$ pour l'autre, dans une même classe : $\{x,y\}\subset G'_{ki}$, $\{z,t\}\subset G'_{k'i'}$, $1\leq k,k'\leq K$. Cette proportion vaut

$$\sum_{1\leq k,k'\leq K}\frac{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\,n(i'\wedge k')[n(i'\wedge k')-1]}{n(i)[n(i)-1]\,n(i')[n(i')-1]} \qquad (28)$$

3.h.a.2'_ calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in H\cap A_2\}$.

Pour (i,i') fixé, ce cardinal est égal au nombre de paires réunies par la partition $\{F_{ji}/1\leq j\leq J\}$ de E_i, multiplié par le nombre de paires réunies par la partition $\{F_{ji'}/1\leq j\leq J\}$ de $E_{i'}$; sa valeur est alors

$$\frac{1}{4}\sum_{1\leq j,j'\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i'\wedge j')[n(i'\wedge j')-1]\,. \quad (29)$$

3.h.b.1_ calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H\cap B_1]$.

Pour (i,i') fixé, relativement à un couple de paires $(\{x,y\},\{z,t\})$, il s'agit de la proportion de couples de partitions $(\{G'_{ki}/1\leq k\leq K\},\{G'_{ki'}/1\leq k\leq K)$ pour lesquelles la paire $\{x,y\}$ se trouve réunie dans une même classe G'_{ki}, les objets z et t appartiennent respectivement à deux classes $G'_{k'i}$ et $G'_{k'i'}$ de même indice. Compte tenu du fait que k' peut être égal à k ou différent de k, on obtient:

$$\sum_{1\leq k\leq K}\frac{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1][n(i\wedge k)-2]\,n(i'\wedge k)}{n(i)[n(i)-1][n(i)-2]\,n(i')}$$
$$+\sum_{1\leq k\neq k'\leq K}\frac{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\,n(i\wedge k')\,n(i'\wedge k')}{n(i)[n(i)-1][n(i)-2]\,n(i')} \quad (30)$$

3.h.b.1'_ calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in H\cap B_1\}$.

Il s'agit du nombre de couples de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$ tels que $\{x,y\}\subset F_{ji}$ pour un $j=1,2,\ldots,J$ et $\{z,t\}\in F_{j'i}*F_{j'i'}$ pour un $j'=1,2,\ldots,J$; i et i' étant fixés. L'énumération doit tenir compte du cas où $j'=j$ et du cas où $j'\neq j$. Dans ces conditions, on obtient pour le cardinal cherché l'expression suivante:

$$\frac{1}{2}\sum_{1\leq j\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1][n(i\wedge j)-2]\, n(i'\wedge j)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{1\leq j\neq j'\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\, n(i\wedge j')\,n(i'\wedge j') \qquad (31)$$

3.h.b.2- calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H\cap B_2]$.

Cette espérance se réduit, pour i, i' et i'' fixés (mutuellement distincts), à la proportion de triplets de partitions $(\{G'_{ki}\ /\ 1\leq k\leq K\}, \{G'_{ki'}\ /\ 1\leq k\leq K\}, \{G'_{ki''}\ /\ 1\leq k\leq K\})$ pour lesquelles, relativement à un couple de paires $(\{x,y\},\{z,t\})$ donné, $\{x,y\}$ se trouve incluse dans une même classe G'_{ki}, z et t appartiennent respectivement à deux classes de même étiquette $G'_{k'i'}$ et $G'_{k'i''}$. On obtient dans ces conditions pour la proportion cherchée

$$\sum_{1\leq k,k'\leq K} \frac{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\, n(i'\wedge k')\,n(i''\wedge k')}{n(i)[n(i)-1]\quad n(i')\,n(i'')} \qquad (32)$$

3.h.b.2'- calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in H\cap B_2\}$.

i, i' et i'' étant fixés mutuellement disjoints, il s'agit du nombre de couples de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$ où $\{x,y\}$ se trouve réunie dans une même classe de la partition $\{F_{ji}\ /\ 1\leq j\leq J\}$ et où, respectivement, z et t appartiennent à deux classes de même étiquette j' des deux partitions $\{F_{ji'}\ /\ 1\leq j\leq J\}$ et $\{F_{ji''}\ /\ 1\leq j\leq J\}$. Ce cardinal s'exprime donc par la formule :

$$\frac{1}{2}\sum_{1\leq j,j'\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\, n(i'\wedge j')\,n(i''\wedge j') \qquad (33)$$

3.h.c.1- calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H\cap C_1]$.

Il s'agit d'une situation analogue à celle considérée au paragraphe 3.h.b.1. ci-dessus à cela près que les rôles de i et de i' sont inversés. Pour (i,i') fixé et relativement à un couple de paires $(\{x,y\},\{z,t\})$, il s'agit de la proportion de couples de partitions $(\{G'_{ki} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{k'i'} / 1 \leq k' \leq K\})$ pour lesquelles d'une part, x et y appartiennent respectivement à deux classes de même étiquette des deux partitions et d'autre part, $\{z,t\}$ se trouve incluse dans une même classe de la deuxième partition. Cette proportion vaut

$$\sum_{1 \leq k \leq K} \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k)[n(i' \wedge k)-1][n(i' \wedge k)-2]}{n(i)\, n(i')[n(i')-1][n(i')-2]}$$

$$+ \sum_{1 \leq k \neq k' \leq K} \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k)\, n(i' \wedge k')[n(i' \wedge k')-1]}{n(i)\, n(i')[n(i')-1][n(i')-2]} \qquad (34)$$

3.h.c.1'_ <u>calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in H \cap C_1\}$.</u>

Ce calcul est analogue à celui 3.h.b.1'. ci-dessus. On obtient pour ce cardinal la valeur suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq J} n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j)[n(i' \wedge j)-1][n(i' \wedge j)-2]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \neq j' \leq J} n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j)\, n(i' \wedge j')[n(i' \wedge j')-1]. \qquad (35)$$

3.h.c.2_ <u>calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in H \cap C_2]$.</u>

Ce calcul est analogue à celui du paragraphe 3.h.b.2. ci-dessus. Relativement à un couple de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$ et pour i', i'' et i fixés mutuellement distincts, on a pour la valeur de la proportion impliquée ici :

$$\sum_{1 \leq k, k' \leq K} \frac{n(i' \wedge k)\, n(i'' \wedge k)\, n(i \wedge k')[n(i \wedge k')-1]}{n(i')\, n(i'')\, n(i)[n(i)-1]} \qquad (36)$$

3.h.c.2'_ <u>calcul de $\sum[\varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in H \cap C_2\}$.</u>

De la même façon que ci-dessus, ce calcul est analogue à celui du paragraphe 3.h.b.2'. Le cardinal cherché se met sous la forme :

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, j' \leq J} n(i' \wedge j)\, n(i'' \wedge j)\, n(i \wedge j')\, [n(i \wedge j') - 1]. \qquad (37)$$

3.h.d.1- <u>calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q) \in H \cap D_1]$.</u>

Les indices i, i', i'' et i''' étant fixés mutuellement distincts, il s'agit relativement à un couple de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$, de la proportion de quatre-uples de partitions $(\{G'_{ki} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{ki'} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{ki''} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{ki'''} / 1 \leq k \leq K\})$ pour lesquelles d'une part, x et y se retrouvent respectivement dans deux classes de même étiquette des deux premières partitions et d'autre part, z et t se retrouvent respectivement dans deux classes de même étiquette des deux dernières partitions. Cette proportion est égale à

$$\sum_{1 \leq k, k' \leq K} \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k)\, n(i'' \wedge k')\, n(i''' \wedge k')}{n(i)\, n(i')\, n(i'')\, n(i''')} \qquad (38)$$

Il faut noter que ce calcul, comme ceux qui précèdent est effectué pour <u>une</u> attribution des objets du couple de paires aux différentes classes E_i, $1 \leq i \leq I$.

3.h.d.1'- <u>calcul de $\sum \{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q) \in H \cap D_1\}$.</u>

Il s'agit du nombre de couples de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$ pour lesquelles d'une part, les deux objets x et y se retrouvent respectivement dans deux classes de même étiquette des deux partitions $\{F_{ji} / 1 \leq j \leq J\}$ et $\{F_{ji'} / 1 \leq j \leq J\}$ et d'autre part, les deux objets z et t se retrouvent respectivement dans deux classes de même étiquette des deux partitions $\{F_{ji''} / 1 \leq j \leq J\}$

et $\{F_{ji'''} / 1 \leq j \leq J\}$. Ce nombre est égal par conséquent à

$$\sum_{1 \leq j, j' \leq J} n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j)\, n(i'' \wedge j')\, n(i''' \wedge j') \qquad (39)$$

3.h.d.2- calcul de $\mathcal{E}\{\Psi'(p)\Psi'(q) / (p,q) \in H \cap D_2\}$.

On fixe i, i' et i'' mutuellement distincts. Relativement à un couple de paires de la forme $(\{x,y\},\{z,t\})$ et à une attribution de x à E_i, y à $E_{i'}$, z à E_i et t à $E_{i''}$, il s'agit de la proportion de tri-uples de partitions $(\{G'_{ki} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{ki'} / 1 \leq k \leq K\}, \{G'_{ki''} / 1 \leq k \leq K\})$ pour lesquelles :

- x et y se retrouvent respectivement dans deux classes de même étiquette des deux partitions $\{G'_{ki} / 1 \leq k \leq K\}$ et $\{G'_{ki'} / 1 \leq k \leq K\}$.

- z et t se retrouvent respectivement dans deux classes de même étiquette des deux partitions $\{G'_{ki} / 1 \leq k \leq K\}$ et $\{G'_{ki''} / 1 \leq k \leq K\}$.

On aura à distinguer deux cas selon que les deux étiquettes sont les mêmes ou non. On obtient pour la proportion cherchée :

$$\sum_{1 \leq k \leq K} \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k)\, [n(i \wedge k) - 1]\, n(i'' \wedge k)}{n(i)\, [n(i) - 1]\, n(i')\, n(i'')} + \sum_{1 \leq k \neq k' \leq K} \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k)\, n(i \wedge k')\, n(i'' \wedge k')}{n(i)\, [n(i) - 1]\, n(i')\, n(i'')} \qquad (40).$$

3.h.d.2'- calcul de $\sum \{\varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in H \cap D_2\}$.

On fixe i, i' et i'' mutuellement distincts. Il s'agit du nombre de couples de paires de la forme $(p,q) = (\{x,y\}, \{z,t\})$ tels que d'une part, x et y appartiennent respectivement à deux classes de même étiquette F_{ji} et $F_{ji'}$ et d'autre part, z et t appartiennent à deux classes de même étiquette $F_{j',i}$ et $F_{j',i''}$. Il y a comme ci-dessus lieu de distinguer selon que $j'=j$ ou $j'\neq j$. Le cardinal cherché se met dans ces conditions sous la forme :

$$\sum_{1\leq j\leq J} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i''\wedge j) + \sum_{1\leq j\neq j'\leq J} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,n(i\wedge j')\,n(i''\wedge j') \qquad (41)$$

3_8_ calcul de $\mathcal{E}(\sum\{\varphi(p)\varphi(q)\psi'(p)\psi'(q)/(p,q)\vdash G\})$.

On commencera par décomposer, conformément à (18), la somme sous le signe espérance en huit morceaux respectivement correspondants à A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 et D_2. Pour fixer les idées, donnons l'exemple du morceau correspondant à B_2 :

$$\sum\{\sum\{\varphi(p)\varphi(q)\psi'(p)\psi'(q)/(p,q)\vdash G\cap P_2(E_i)\times E_{i'}*E_{i''}\}/ \quad 1\leq i\leq I, 1\leq i'<i''\leq I, i'\neq i, i''\neq i\}. \ (41)$$

Compte tenu des calculs préliminaires précédents (formules (19) à (25)), on obtient :

$$\sum_{1\leq i\leq I,}\ \sum_{1\leq j\leq J,}\ \sum_{1\leq k\leq K.} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1][n(i\wedge j)-2]\,n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1] \times [n(i\wedge k)-2]/n(i)[n(i)-1][n(i)-2]$$

$$+\sum_{1\leq i\neq i'\leq I,}\ \sum_{1\leq j\leq J,}\ \sum_{1\leq k\leq K.} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i'\wedge j)\,n(i\wedge k) \times [n(i\wedge k)-1]\,n(i'\wedge k)/n(i)[n(i)-1]\,n(i')$$

$$+\sum_{1\leq i\neq i'\leq I,}\ \sum_{1\leq j\leq J,}\ \sum_{1\leq k\leq K.} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)[n(i'\wedge j)-1]\,n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k) \times [n(i'\wedge k)-1]/n(i)\,n(i')[n(i')-1]$$

$$+\sum_{G(I)}\{\sum_{1\leq j\leq J,}\ \sum_{1\leq k\leq K.} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,n(i''\wedge j)\,n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k) \times n(i''\wedge k)/n(i)\,n(i')\,n(i'')\}\ . \qquad (42).$$

où, rappelons le (cf. formule (18)), $G(I)$ est l'ensemble des couples de paires de la forme $(\{i,i'\},\{i,i''\})$ où des symboles distincts représentent des indices différents.

Nous noterons $\gamma(G)$ l'expression (42) précédente.

3.h. – calcul de $\mathcal{E}\{\sum \varphi(p)\varphi(q)\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H3\}$.

Ici encore, on aura à décomposer, conformément à (18), la somme sous le signe espérance en huit morceaux respectivement correspondants à A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 et D_2. Compte tenu des calculs préliminaires précédents (formules (26) à (41)) on obtient :

$$\sum_{1\leq i\leq I} \Big[\sum_{1\leq j\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1][n(i\wedge j)-2][n(i\wedge j)-3]\Big] \times$$
$$\Big[\sum_{1\leq k\leq K} n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1][n(i\wedge k)-2][n(i\wedge k)-3]\Big] \Big/$$
$$4n(i)[n(i)-1][n(i)-2][n(i)-3]$$

$$+ \sum_{1\leq i\neq i'\leq I,\ 1\leq j,j'\leq J} \Big[\sum n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i'\wedge j')[n(i'\wedge j')-1]\Big] \times$$
$$\Big[\sum_{1\leq k,k'\leq K} n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\,n(i'\wedge k')[n(i'\wedge k')-1]\Big] \Big/$$
$$4n(i)[n(i)-1]\,n(i')[n(i')-1]$$

$$+ \sum_{1\leq i\neq i'\leq I,\ 1\leq j\leq J} \Big\{\sum n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1][n(i\wedge j)-2]$$
$$+ \sum_{1\leq j\neq j'\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i\wedge j')\,n(i'\wedge j')\Big\} \times$$
$$\Big\{\sum_{1\leq k\leq K} n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1][n(i\wedge k)-2]$$
$$+ \sum_{1\leq k\neq k'\leq K} n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\,n(i\wedge k')\,n(i'\wedge k')\Big\} \Big/$$
$$2\,n(i)[n(i)-1][n(i)-2]\,n(i')$$

$$+ \sum \Big\{\Big[\sum_{1\leq j,j'\leq J} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i'\wedge j')\,n(i''\wedge j')\times$$
$$\sum_{1\leq k,k'\leq K} n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\,n(i'\wedge k')\,n(i''\wedge k')\Big] \Big/$$
$$2n(i)[n(i)-1]\,n(i')\,n(i'')\ \Big|\ 1\leq i\leq I,\ 1\leq i'<i''\leq I,\ i'\neq i,\ i''\neq i\Big\}$$

$$+\sum_{1\leq i\neq i'\leq I}\frac{\Big\{\sum\limits_{1\leq j\leq J} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,[n(i'\wedge j)-1]\,[n(i'\wedge j)-2]+\sum\limits_{1\leq j\neq j'\leq J} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,n(i'\wedge j')\,[n(i'\wedge j')-1]\Big\}\times\Big\{\sum\limits_{1\leq k\leq K} n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)\,[n(i'\wedge k)-1]\,[n(i'\wedge k)-2]+\sum\limits_{1\leq k\neq k'\leq K} n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)\,n(i'\wedge k')\,[n(i'\wedge k')-1]\Big\}}{2\,n(i)\,n(i')\,[n(i')-1]\,[n(i')-2]}$$

$$+\sum\left\{\frac{\Big\{\sum\limits_{1\leq j,j'\leq J} n(i'\wedge j)\,n(i''\wedge j)\,n(i\wedge j')\,[n(i\wedge j')-1]\Big\}\times\Big\{\sum\limits_{1\leq k,k'\leq K} n(i'\wedge k)\,n(i''\wedge k)\,n(i\wedge k')\,[n(i\wedge k')-1]\Big\}}{2\,n(i')\,n(i'')\,n(i)\,[n(i)-1]}\;\middle|\; 1\leq i'<i''\leq I,\ 1\leq i\leq I,\ i\neq i',\ i\neq i''\right\}$$

$$+\sum_{H(I)}\frac{\Big\{\sum\limits_{1\leq j,j'\leq J} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,n(i''\wedge j')\,n(i'''\wedge j')\Big\}\times\Big\{\sum\limits_{1\leq k,k'\leq K} n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)\,n(i''\wedge k')\,n(i'''\wedge k')\Big\}}{n(i)\,n(i')\,n(i'')\,n(i''')}$$

$$+\sum_{G(I)}\frac{\Big\{\sum\limits_{1\leq j\leq J} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,[n(i\wedge j)-1]\,n(i''\wedge j)+\sum\limits_{1\leq j\neq j'\leq J} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,n(i\wedge j')\,n(i''\wedge j')\Big\}\times\Big\{\sum\limits_{1\leq k\leq K} n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)\,[n(i\wedge k)-1]\,n(i''\wedge k)+\sum\limits_{1\leq k\neq k'\leq K} n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)\,n(i\wedge k')\,n(i''\wedge k')\Big\}}{n(i)\,[n(i)-1]\,n(i')\,n(i'')}\qquad(43)$$

où, rappelons le encore une fois $G(I)$ (resp. $H(I)$) est l'ensemble des couples de paires d'indices avec (resp. sans) composante commune.

Nous noterons $\eta(H)$ l'expression (43) précédente.

THEOREME 1 – La moyenne $\mu(\beta,\gamma';\alpha)$ de la v.a. $S(\beta,\gamma';\alpha)$ est donnée par l'expression (14) ci-dessus. La variance var$(\beta,\gamma';\alpha)$ de cette v.a. est donnée par la formule

$$\mathrm{var}(\beta,\gamma';\alpha)=\mu(\beta,\gamma';\alpha)+\gamma(G)+\eta(H)-[\mu(\beta,\gamma';\alpha)]^2 \qquad (44)$$

où $\gamma(G)$ (resp. $\eta(H)$) est donné par la formule (42) (resp. (43)) ci-dessus. L'indice d'association partielle $\rho_{\beta\gamma.\alpha}$ est dans ces conditions donné par la formule

$$\rho_{\beta\gamma.\alpha}=[s(\beta,\gamma)-\mu(\beta,\gamma';\alpha)]/\sqrt{\mathrm{var}(\beta,\gamma';\alpha)} \qquad (45)$$

où $s(\beta,\gamma)$ est l'indice brut défini par la formule (1) ci-dessus.

Les expressions rentrant dans la composition de la formule (44) peuvent paraître complexes d'un point de vue analytique, toutefois leur programmation sur ordinateur, bien que délicate, ne présente pas de difficulté majeure.

On a pu déjà remarquer la symétrie en j et k, $1\leqslant j\leqslant J$, $1\leqslant k\leqslant K$, des expressions de $\mu(\beta,\gamma';\alpha)$ et de var$(\beta,\gamma';\alpha)$. Cette symétrie demeure pour n'importe quel moment de la distribution de $S(\beta,\gamma';\alpha)$ car comme dans le cas total et comme nous allons chercher à nous en persuader, la distribution de la v.a. $S(\beta,\gamma';\alpha)$ est la même que celle de la v.a. duale $S(\beta',\gamma;\alpha)$. La partition aléatoire Q' associée à Q peut être notée $\{F'_j\,/\,1\leqslant j\leqslant J\}$ où F'_j est la partie aléatoire de E associée à la classe F_j de la partition Q, $1\leqslant j\leqslant J$, dans une h.a.l. qui préserve la position relative par rapport aux classes E_i de la partition P, $1\leqslant i\leqslant I$. Par conséquent, F'_j sera défini sous la forme de la somme ensembliste

$$F'_j=\sum_{1\leqslant i\leqslant I} F'_{ji} \qquad (46)$$

pour tout $j = 1, 2, \ldots, J$, où $(F'_{j1}, F'_{j2}, \ldots, F'_{ji}, \ldots, F'_{jI})$ est une suite de parties aléatoires indépendantes, F'_{ji} étant choisi de cardinal $n(i \wedge j)$, uniformément au hasard dans E_i ; en d'autres termes F'_{ji} est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniforme, des parties de E_i de même cardinal $n(i \wedge j)$. En se référant à des notations que l'on comprend, si la v.a. $S(\beta, \gamma'; \alpha)$ pouvait se mettre sous la forme (cf. (4) et (5)) :

$$S(\beta, \gamma'; \alpha) = \sum_{1 \leq i \leq I} \sum \{\varphi(p)\psi'(p) \,/\, p \in P_2(E_i)\} + \sum_{1 \leq i < i' \leq I} \sum \{\varphi(p)\psi'(q) \,/\, (p,q) \in E_i * E_{i'}\}, \quad (47)$$

celle $S(\beta', \gamma; \alpha)$ peut se mettre aussi sous la forme :

$$S(\beta', \gamma; \alpha) = \sum_{1 \leq i \leq I} \sum \{\varphi'(p)\psi(p) \,/\, p \in P_2(E_i)\} + \sum_{1 \leq i < i' \leq I} \sum \{\varphi'(p)\psi(q) \,/\, (p,q) \in E_i * E_{i'}\}. \quad (48)$$

En vertu des propriétés de dualité que nous avions établies lors de l'étude du cas total (cf. [LERMAN (1973)]), chacune des v.a. de la forme $\sum \{\varphi(p)\psi'(p) / p \in P_2(E_i)\}$ a la même distribution que celle $\sum \{\varphi'(p)\psi(p) / p \in P_2(E_i)\}$, $1 \leq i \leq I$. De même, on peut montrer que pour tout entier r, le moment d'ordre r de la distribution de $\sum \{\varphi(p)\psi'(q) / (p,q) \in E_i * E_{i'}\}$ est identique au moment d'ordre r de la distribution de $\sum \{\varphi'(p)\psi(q) / (p,q) \in E_i * E_{i'}\}$, $1 \leq i < i' \leq I$. Enfin le système des relations stochastiques entre ces différentes v.a. qui rentrent dans la composition de la somme (47) est, pour des raisons d'identification formelle, exactement le même que celui qui régit les différentes v.a. associées dualement de la somme (48). Il en résulte la propriété suivante:

<u>THEOREME 2</u> – Dans le cadre des h.a.l. à caractère partiel (cf. formule (2) pour la v.a. $S(\beta, \gamma'; \alpha)$ et formule (46) pour la v.a. $S(\beta', \gamma; \alpha)$), la distribution de la v.a. $S(\beta, \gamma'; \alpha)$ est

la même que celle de la v.a. $S(\beta', \gamma ; \alpha)$.

4 - CAS DE L'INDEPENDANCE CONDITIONNELLE.

La notion d'indépendance sous jacente à notre indice de comparaison entre partitions s'exprime au niveau de l'ensemble des paires d'objets de l'échantillon étudié. Pour le voir, revenons au cas total de la comparaison entre les deux variables partitions β et γ (cf. [LERMAN (1973)]). Dans ce cas, le numérateur de l'indice de comparaison se met sous la forme

$$\boxed{}\left\{\frac{n(j\wedge k)[n(j\wedge k)-1]}{2} - \frac{n(j)[n(j)-1]n(k)[n(k)-1]}{2n(n-1)} \Big/ 1\leq j\leq J,\ 1\leq k\leq K\right\} \quad (49)$$

La relation définissant l'indépendance entre les variables partitions β et γ s'exprime ici comme suit : Pour tout (j,k), $1\leq j\leq J$, $1\leq k\leq K$, la proportion de paires réunies dans la classe (j,k) de la partition croisée $Q\wedge R$ est égale au produit de la proportion de paires réunies dans la classe j par la proportion de paires réunies dans la classe k ; soit

$$\frac{n(j\wedge k)[n(j\wedge k)-1]}{n(n-1)} = \frac{n(j)[n(j)-1]}{n(n-1)} \times \frac{n(k)[n(k)-1]}{n(n-1)}$$

pour tout (j,k), $1\leq j\leq J$, $1\leq k\leq K$. (50)

Il est clair que les relations (50) entraînent la nullité de l'expression (49).

Dans ces conditions, l'indépendance conditionnelle entre les variables partitions β et γ relativement à la variable partition α, s'exprime dans ce cadre comme suit :

- Pour tout i, $1\leq i\leq I$ et tout (j,k), $1\leq j\leq J$, $1\leq k\leq K$, la proportion de paires réunies dans la classe (i,j,k) de $P\wedge Q\wedge R$, est égale au produit de la proportion des paires réunies dans la classe (i,j) de $P\wedge Q$ par la proportion de paires réunies dans la classe (i,k) de $P\wedge R$; ces différentes proportions étant conditionnelles et relatives à l'ensemble des paires de la classe E_i :

$(\forall i, 1\leq i\leq I)$ et $(\forall (j,k), 1\leq j\leq J, 1\leq k\leq K)$,

$$\frac{n(i\wedge j\wedge k)[n(i\wedge j\wedge k)-1]}{n(i)[n(i)-1]} = \frac{n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]}{n(i)[n(i)-1]} \times \frac{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]}{n(i)[n(i)-1]} \tag{51}$$

– Pour tout (i,i'), $1\leq i<i'\leq I$ et tout (j,k), $1\leq j\leq J$, $1\leq k\leq K$, la proportion relative de paires de la classe (j,k) de $Q\wedge R$ dont les deux composantes appartiennent respectivement aux classes (i,j,k) et (i',j,k) de $P\wedge Q\wedge R$ est égale au produit de la proportion relative des paires de la classe j dont les deux composantes appartiennent respectivement aux classes (i,j) et (i',j) de $P\wedge Q$, par la proportion relative des paires de la classe k dont les deux composantes appartiennent respectivement aux classes (i,k) et (i',k) de $P\wedge R$, ces différentes proportions étant conditionnelles et relatives à l'ensemble des paires dont l'une des composantes appartient à E_i et l'autre composante à $E_{i'}$:

$(\forall (i,i'), 1\leq i<i'\leq I)$ et $(\forall (j,k), 1\leq j\leq J, 1\leq k\leq K)$,

$$\frac{n(i\wedge j\wedge k)\,n(i'\wedge j\wedge k)}{n(i)\,n(i')} = \frac{n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)}{n(i)\,n(i')} \times \frac{n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)}{n(i)\,n(i')} \tag{52}$$

Rappelons l'expression explicite de l'indice centré, numérateur du coefficient $\rho_{\beta\gamma.\alpha}$:

$$\sum \Big\{ n(j\wedge k)[n(j\wedge k)-1]/2 - \Big(\sum_{1\leq i\leq I} n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1] \times n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]/2\,n(i)[n(i)-1]$$
$$+\sum_{1\leq i<i'\leq I} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j)\,n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k)\,/\,n(i)\,n(i')\Big) \;\Big|\; 1\leq j\leq J,\ 1\leq k\leq K.\Big\}. \tag{53}$$

Dans le cas de l'hypothèse de l'indépendance conditionnelle caractérisée par les relations (51) et (52) ci-dessus, on peut remplacer le contenu de la parenthèse de l'expression (53) (qui représente $\mu(\beta, \gamma'; \alpha)$ par

$$\sum_{1 \leq i \leq I} n(i \wedge j \wedge k)[n(i \wedge j \wedge k) - 1]/2 + \sum_{1 \leq i < i' \leq I} n(i \wedge j \wedge k)\, n(i' \wedge j \wedge k) \qquad (54).$$

Ce cardinal est égal à $n(j \wedge k)[n(j \wedge k) - 1]/2$; en effet la somme (54) représente la décomposition du nombre de paires réunies dans la classe $(j \wedge k)$ de $Q \wedge R$ conformément à la partition (5) (voir § 1 ci-dessus) de $P_2(E)$. Il en résulte la propriété suivante :

<u>PROPRIETE</u>- L'indice de corrélation partielle $\rho_{\beta\gamma.\alpha}$ est nul dans le cas de l'indépendance conditionnelle caractérisée par les relations (51) et (52) ci-dessus.

IV.3- cas d'un indice d'association partielle conforme à l'indice de Lerman dans le cadre d'une h.a.l. à caractère global.

1-EXPRESSION DE L'H.A.L.

Les notations restent les mêmes que celles du paragraphe précédent, l'indice cherché ici sera désigné par $v_{\beta\gamma.\alpha}$.

L'indice brut entre les deux variables partition β et γ, $s(\beta, \gamma)$ reste toujours défini par la relation (1) du paragraphe précédent. Ce qui va changer est la nature des calculs conditionnels qui auront un caractère plus global. La v.a. $S_1(\beta, \gamma'; \alpha)$ (resp. $S_1(\beta', \gamma; \alpha)$) associée à $s(\beta, \gamma)$ sera en fait définie à partir de l'expression de ses moments calculés d'une certaine façon dans le cadre de la même h.a.l. que ci-dessus où R' est un élément aléatoire dans l'ensemble des partitions en classes étiquetées de type $t=(n(1),n(2),\ldots,n(k),\ldots,n(K))$ dont la position relative par rapport à la partition P est préservée au niveau des cardinaux des classes de la partition croisée $P\wedge Q$. Cependant, les calculs conditionnels qui continueront à être effectués au niveau de E et non de $F=P_2(E)$, le seront "en moyenne" en ne retenant d'une paire d'objets de E que son appartenance à $\mathcal{R}(P)$ ou à $\mathcal{S}(P)$, en ignorant la position relative des deux composantes de la paire par rapport aux diverses classes E_i, $1\leq i\leq I$, de la partition P. De même, relativement à un couple de paires $(\{x,y\},\{x,z\})$ de G (resp. $(\{x,y\},\{z,t\})$ de H), on ne retiendra de sa structure que son appartenance à $\mathcal{R}(P)\times\mathcal{R}(P)$, à $\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P)$ ou à $\mathcal{S}(P)\times\mathcal{S}(P)$, en ignorant la position relative par rapport aux diverses classes E_i, $1\leq i\leq I$, des objets entrant dans la composition du couple de paires.

Cette approche se justifie à différents égards. Il s'agit d'abord de l'attitude statistique générale devant l'ignorance. D'autre part, dans le cas où les cardinaux des classes de la partition croisée $P\wedge R$ sont identiques, la moyenne de la v.a. $S_1(\beta,\gamma';\alpha)$ est identique à celle de $S(\beta,\gamma';\alpha)$; de sorte qu'on obtient le même numérateur du coefficient d'association partielle. Par ailleurs, toujours dans la même situation, les expressions élémentaires servant au calcul de la variance de $S(\beta,\gamma';\alpha)$ se rapprochent formellement de celles correspondantes servant au calcul de la variance de $S_1(\beta,\gamma',\alpha)$. Enfin, si nous accentuons cette démarche jusqu'à ne distinguer, relativement à un couple de paires (p,q), que $p=q$ et $p\neq q$, on se retrouve dans la même situation que celle de la comparaison partielle d'attributs (cf. § II) où on aurait ici à comparer les deux parties $\mathcal{R}(Q)$ et $\mathcal{R}(R)$ de F, en cherchant à neutraliser l'influence de la partie $\mathcal{R}(P)$. Ainsi, en tenant compte de la structure du couple de paires d'objets, nous espérons fournir un calcul de la variance plus précis que le dernier mentionné; calcul que nous pourrons transposer dans le cas où les variables sont qualitatives ordinales et surtout dans le cas des variables "rang" où c'est la seule solution que nous avons.

2_ CALCUL DE LA MOYENNE DE LA V.A. $S_1(\beta, \gamma'; \alpha)$.

Nous continuons à noter φ (resp. ψ') la fonction indicatrice de $\mathcal{R}(Q)$ (resp. $\mathcal{R}(R')$). La v.a. $S_1(\beta, \gamma'; \alpha)$ peut s'exprimer par la formule suivante :

$$S_1(\beta, \gamma'; \alpha) = \sum \{\varphi(p)\psi'(p) / p \in \mathcal{R}(P)\} + \sum \{\varphi(p)\psi'(p) / p \in \mathcal{S}(P)\}, \quad (1)$$

Dans ces conditions, le calcul de $\mathcal{E}[S_1(\beta, \gamma'; \alpha)]$ suppose le calcul des deux expressions suivantes :

$$Pr\{\psi'(p) = 1 / p \in \mathcal{R}(P)\} \quad (2)$$

et

$$Pr\{\psi'(p) = 1 / p \in \mathcal{S}(P)\} \quad (3)$$

Nous désignerons par $r[(n;t); P]$ le cardinal de l'ensemble des partitions R_1 en classes étiquetées de type t pour lesquelles le type de la partition croisée $P \wedge R_1$ est celui de $P \wedge R$; soit $\{n(i \wedge k) / 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq K\}$. Nous n'aurons pas besoin d'expliciter ce cardinal dans les raisonnements par symétrie que nous aurons à conduire ci-dessous.

Nous désignerons par $r[p / p \in \mathcal{R}(P)]$ (resp. $r[p/p \in \mathcal{S}(P)]$) le nombre <u>moyen</u> de fois où les composantes de la paire p se trouvent réunies dans une même classe de la partition R_1, lorsque R_1 décrit le sous ensemble de $\mathcal{P}(n;t)$ caractérisé par le type de $P \wedge R_1$.

Dans ces conditions, les expressions (2) et (3) ci-dessus peuvent se mettre sous la forme

$$Pr\{\psi'(p) = 1 / p \in \mathcal{R}(P)\} = \frac{r[p / p \in \mathcal{R}(P)]}{r[(n;t); P]}, \quad (4)$$

$$Pr\{\psi'(p) = 1 / p \in \mathcal{S}(P)\} = \frac{r[p / p \in \mathcal{S}(P)]}{r[(n;t); P]}. \quad (5)$$

Pour avoir le premier des deux rapports, nous allons compter de deux façons différentes le nombre de réunions de paires de $\mathcal{R}(P)$ qui ont lieu par la partition R_1, lorsque R_1 décrit son ensemble d'évolution dont le cardinal vient d'être noté $r[(n;t);P]$. Ce nombre de réunions s'exprime d'une part sous la forme

$$r[p \,/\, p \in \mathcal{R}(P)] \times \mathrm{card}\,[\mathcal{R}(P)]$$

et d'autre part, sous la forme

$$r[(n;t);P] \times \mathrm{card}\,[\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(R)]$$

Il en résulte que

$$\Pr\{\psi'(p)=1 \,/\, p \in \mathcal{R}(P)\} = \frac{\mathrm{card}\,[\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(R)]}{\mathrm{card}\,[\mathcal{R}(P)]} \qquad (6)$$

C'est de la même manière qu'on évalue le deuxième des deux rapports (5) ci-dessus. On compte de deux façons différentes le nombre de réunions de paires de $\mathcal{S}(P)$ qui s'opèrent par la partition R_1, lorsque R_1 décrit son espace d'évolution. Ce nombre de réunions de paires s'exprime d'une part sous la forme

$$r[p \,/\, p \in \mathcal{S}(P)] \times \mathrm{card}\,[\mathcal{S}(P)]$$

et d'autre part, sous la forme

$$r[(n;t);P] \times \mathrm{card}\,[\mathcal{S}(P) \cap \mathcal{R}(R)]$$

Il en résulte que

$$\Pr\{\psi'(p)=1 \,/\, p \in \mathcal{S}(P)\} = \frac{\mathrm{card}\,[\mathcal{S}(P)\cap\mathcal{R}(R)]}{\mathrm{card}\,[\mathcal{S}(P)]} \qquad (7)$$

Dans ces conditions, on obtient

$$\mathcal{E}[S_1(\beta,\gamma';\alpha)] = \frac{\mathrm{card}\,[\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)]\,\mathrm{card}\,[\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(R)]}{\mathrm{card}\,[\mathcal{R}(P)]} + \frac{\mathrm{card}\,[\mathcal{S}(P)\cap\mathcal{R}(Q)]\,\mathrm{card}\,[\mathcal{S}(P)\cap\mathcal{R}(R)]}{\mathrm{card}\,[\mathcal{S}(P)]} \qquad (8)$$

puisque φ est la fonction indicatrice de $\mathcal{R}(Q)$.

En explicitant par rapport aux cardinaux des classes, l'expression (8) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\sum\left\{ n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\, n(i'\wedge k)[n(i'\wedge k)-1] \Big/ \begin{array}{l}1\leq i<i'\leq I,\\ 1\leq j\leq J,\\ 1\leq k\leq K.\end{array}\right\}}{2\sum\{ n(i)[n(i)-1] / \ 1\leq i\leq I \}}$$

$$+\ \frac{\sum\left\{ n(i\wedge j)\, n(i'\wedge j)\, n(i''\wedge k)\, n(i'''\wedge k) \Big/ \begin{array}{l}1\leq i<i'\leq I,\\ 1\leq i''<i'''\leq I,\\ 1\leq j\leq J,\\ 1\leq k\leq K.\end{array}\right\}}{\sum\{ n(i)\, n(i') / \ 1\leq i<i'\leq I \}} \qquad (9)$$

Il est naturel de chercher à comparer $\mathcal{E}[S_1(\beta,\gamma';\alpha)]$ avec $\mathcal{E}[S(\beta,\gamma';\alpha)]$ obtenu au paragraphe précédent dont nous allons reprendre la formule (14) qui peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{E}[S(\beta,\gamma';\alpha)] = \sum_{1\leq i\leq I} \frac{\mathrm{card}[P_2(E_i)\cap\mathcal{R}(Q)]\,\mathrm{card}[P_2(E_i)\cap\mathcal{R}(R)]}{\mathrm{card}[P_2(E_i)]}$$

$$+\sum_{1\leq i<i'\leq I} \frac{\mathrm{card}[(E_i * E_{i'})\cap\mathcal{R}(Q)]\,\mathrm{card}[(E_i * E_{i'})\cap\mathcal{R}(R)]}{\mathrm{card}(E_i * E_{i'})} \qquad (10).$$

Par conséquent, $\mathcal{E}[S(\beta,\gamma';\alpha)]$ est essentiellement distinct de $\mathcal{E}[S_1(\beta,\gamma';\alpha)]$ et on voit bien que sa structure correspond à une h. a. l. plus locale que celle qui définit $\mathcal{E}[S_1(\beta,\gamma';\alpha)]$.

3_DEFINITION DE L'INDEPENDANCE CONDITIONNELLE.

La définition de la notion d'indépendance conditionnelle liée à l'expression de l'h. a. l. considérée ici (cf. § 1 ci-dessus) est la suivante :

— La proportion relative de paires de la classe (j,k) de $Q\wedge R$ ($1\leq j\leq J$, $1\leq k\leq K$) dont les deux composantes se trouvent réunies dans une même classe non spécifiée de la partition P, est égale au produit de la proportion relative des paires de la classe j dont les deux composantes se trouvent réunies dans une même classe non spécifiée de la partition P, par la proportion relative des paires de la classe k dont les deux composantes se trouvent réunies dans une même classe non spécifiée de la partition P; ces proportions étant relatives à l'ensemble des paires réunies par la partition P.

– La proportion relative des paires de la classe (j, k) de $Q \wedge R$ ($1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$) dont les deux composantes se trouvent séparées dans deux classes distinctes mais non spécifiées de la partition P est égale au produit de la proportion relative des paires de la classe j dont les deux composantes se trouvent séparées dans deux classes distinctes mais non spécifiées de la partition P, par la proportion relative des paires de la classe k dont les deux composantes se trouvent séparées dans deux classes distinctes mais non spécifiées de la partition P; ces proportions étant relatives à l'ensemble des paires séparées par la partition P.

La première assertion s'exprime par les relations :

$(\forall (j,k), 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K)$,

$$\sum_{1 \leq i \leq I} n(i \wedge j \wedge k)[n(i \wedge j \wedge k) - 1] \Big/ \sum_{1 \leq i \leq I} n(i)[n(i) - 1]$$

$$= \Big\{ \sum_{1 \leq i \leq I} n(i \wedge j)[n(i \wedge j) - 1] \Big/ \sum_{1 \leq i \leq I} n(i)[n(i) - 1] \Big\}$$

$$\times \Big\{ \sum_{1 \leq i \leq I} n(i \wedge k)[n(i \wedge k) - 1] \Big/ \sum_{1 \leq i \leq I} n(i)[n(i) - 1] \Big\} \quad (11).$$

La deuxième assertion s'exprime par les relations :

$(\forall (j,k), 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K)$

$$\sum_{1 \leq i < i' \leq I} n(i \wedge j \wedge k)\, n(i' \wedge j \wedge k) \Big/ \sum_{1 \leq i < i' \leq I} n(i)\, n(i')$$

$$= \{\sum_{1\leq i<i'\leq I} n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j) / \sum_{1\leq i<i'\leq I} n(i)\,n(i')\}$$

$$\times \{\sum_{1\leq i<i'\leq I} n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k) / \sum_{1\leq i<i'\leq I} n(i)\,n(i')\}. \quad (12)$$

<u>PROPRIETE</u>. L'indice de corrélation partielle $r_{\beta\gamma.\alpha}$ est nul dans le cas de l'indépendance conditionnelle caractérisée par les relations (11) et (12) ci-dessus.

En effet, il suffit de reprendre la décomposition déjà utilisée (cf. (54) § IV.2) pour le cardinal $n(j\wedge k)[n(j\wedge k)-1]/2$:

$$n(j\wedge k)[n(j\wedge k)-1]/2 = \sum_{1\leq i\leq I} n(i\wedge j\wedge k)[n(i\wedge j\wedge k)-1]/2$$

$$+ \sum_{1\leq i<i'\leq I} n(i\wedge j\wedge k)\,n(i'\wedge j\wedge k) \quad (13)$$

Dans le cadre de l'hypothèse de l'indépendance conditionnelle, la relation (11) permet d'identifier la première somme de (13) avec le premier des deux rapports dont l'expression (9) fait la somme, alors que la relation (12) permet l'identification de la deuxième somme de (13) avec le deuxième des deux rapports de (9).

4- CALCUL DE LA VARIANCE DE LA V.A. $S_1(\beta, \gamma'; \alpha)$.

Avec les notations déjà introduites ci-dessus, le carré de la v.a. $S_1(\beta,\gamma';\alpha)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sum\{\varphi(p)\psi'(p) / p\in\mathcal{R}(P)\}$$
$$+\sum\{\varphi(p)\varphi(q)\psi'(p)\psi'(q)/(p,q)\in(\mathcal{R}(P))^{[2]}\}$$
$$+\sum\{\varphi(p)\psi'(p) / p\in\mathcal{S}(P)\}$$
$$+\sum\{\varphi(p)\varphi(q)\psi'(p)\psi'(q)/(p,q)\in(\mathcal{S}(P))^{[2]}\}$$
$$+2\sum\{\varphi(p)\varphi(q)\psi'(p)\psi'(q)/(p,q)\in\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P)\}. \quad (14)$$

où on a noté $X^{[2]}$ l'ensemble des couples formé d'éléments distincts de X.

Ce calcul nécessite la décomposition selon G (ensemble des couples de paires de E ayant une composante commune) et H (ensemble des couples de paires de E sans composante commune) de chacun des ensembles $(\mathcal{R}(P))^{[2]}$, $(\mathcal{S}(P))^{[2]}$ et $\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P)$. On a besoin d'évaluer chacune des expressions suivantes :

$$\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)/\ (p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}]$$
$$E_1\{\varphi(p)\varphi(q)/\ (p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}\}$$
$$\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)/\ (p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}]$$
$$E_1\{\varphi(p)\varphi(q)/\ (p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}\}$$
$$\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)/\ (p,q)\in G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]$$
$$E_1\{\varphi(p)\varphi(q)/\ (p,q)\in G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}\}$$
$$\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)/\ (p,q)\in H\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]$$
$$E_1\{\varphi(p)\varphi(q)/\ (p,q)\in H\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}\}$$
$$\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)/\ (p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]$$
$$E_1\{\varphi(p)\varphi(q)/\ (p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))\}$$
$$\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)/\ (p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]$$
$$E_1\{\varphi(p)\varphi(q)/\ (p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))\}$$

Chacune des expressions précédentes sera calculée à l'intérieur d'un sous paragraphe dont le numéro suggérera le contenu. Les raisonnements que nous mènerons seront de symétrie et de même nature que ceux qui ont permis d'établir les formules (6) et (7) précédentes.

4-5.r.2-calcul de $\mathcal{E}[\psi'(p)\psi'(q)/(p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}]$.

Comme ci-dessus, nous désignerons par R_1 un élément courant du sous-ensemble des partitions de $\mathcal{P}(n;t)$ pour lesquelles la relation (4) est satisfaite ; rappelons que nous avons noté $r[(n;t);P]$ le cardinal de ce sous ensemble de partitions.

Nous dirons qu'un couple de paires (p,q) est "spécifié" par la partition R_1 si cette dernière réunit les deux composantes de p (resp. de q) ; en d'autres termes si (p,q) appartient à $(\mathcal{R}(R_1))^{[2]}$.

Nous allons calculer de deux façons différentes le nombre total de spécifications qui s'opèrent au niveau de l'ensemble $\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}$ lorsque R_1 décrit son espace d'évolution. Pour cela, on introduit le nombre <u>moyen</u> de fois où (p,q) de $\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}$ se trouve spécifié lorsque R_1 décrit son espace d'évolution.

On a

$$r[(p,q)/(p,q) \in \mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}] \times \mathrm{card}[\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}]$$
$$= r[(n;t);P] \times \mathrm{card}[\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(R_1))^{[2]}] ; \quad (15)$$

en effet, chaque partition R_1 spécifie $\mathrm{card}[\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]} \cap (\mathcal{R}(R))^{[2]}]$ couples de paires de $\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}$.

La quantité cherchée représente la proportion

$$r[(p,q)/(p,q) \in \mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}] / r[(n;t);P] ,$$

la relation (15) montre que cette proportion est égale à

$$\mathrm{card}[\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(R))^{[2]}] / \mathrm{card}[\mathcal{G} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}]$$
$$= \frac{\sum\{n(i \wedge k)[n(i \wedge k)-1][n(i \wedge k)-2] / 1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant k \leqslant K\}}{\sum\{n(i)[n(i)-1][n(i)-2] / 1 \leqslant i \leqslant I\}} . \quad (16)$$

4-g.r.2 – calcul de $\mathcal{E}\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}\}$

L'expression à calculer représente

$$\text{card}\,[G\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}\cap(\mathcal{R}(Q))^{[2]}=\text{card}\,[G\cap(\mathcal{R}(P\wedge Q))^{[2]}]$$

$$=\mathcal{E}\{n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1][n(i\wedge j)-2]/1\leq i\leq I,\,1\leq j\leq J\}. \quad (17).$$

4-g.s.2 – calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]$

Nous désignons par $r[(p,q)/(p,q)\in G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]$ le nombre moyen de fois où le couple de paires (p,q) fixé dans $G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}$ se trouve spécifié lorsque R_1 décrit son espace d'évolution ; il est clair pour des raisons de symétrie, que chaque élément de $G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}$ se trouve spécifié le même nombre de fois.

Nous allons comme ci-dessus calculer de deux façons différentes le nombre total de spécifications qui s'opèrent au niveau de l'ensemble $G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}$ lorsque R_1 décrit son espace d'évolution. On a

$$r[(p,q)/(p,q)\in G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]\times\text{card}\,[G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]$$

$$=r[(n;t),P]\times\text{card}\,[G\cap(\mathcal{R}(R)^{[2]}\cap\mathcal{S}(P)^{[2]})]. \quad (18)$$

La détermination du rapport qui nous intéresse nécessite l'évaluation par rapport aux cardinaux des classes des différentes partitions en jeu, de

$$\text{card}\,[G\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]=\text{card}\,[G\cap(\mathcal{S}(P))^{2}]$$

et de $\text{card}\,[G\cap(\mathcal{R}(R)^{[2]}\cap\mathcal{S}(P)^{(2)})]=\text{card}\,[G\cap(\mathcal{R}(R)^{2}\cap\mathcal{S}(P)^{2})]$. (19)

La détermination du premier cardinal peut se voir à partir d'un raisonnement constructif sur le nombre de façons de choisir le couple de paires de la forme $(\{x,y\},\{x,z\})$ tel que $\{x,y\}$ et $\{x,z\}$ appartiennent à $\mathcal{S}(P)$; c'est à dire, se trouvent séparées par la partition $P=\{E_i/1\leq i\leq I\}$. On obtient

$$\square\{n(i)\,n(i')[n(i')-1]/1\leq i\neq i'\leq I\}+\square\{n(i)\,n(i')\,n(i'')/(\{i,i'\},\{i,i''\})\in\mathfrak{G}(I)\}\,, \quad (20)$$

où $\mathfrak{G}(I)$ est l'ensemble des couples de paires d'indices ayant une composante commune. D'autre part, l'ensemble sous le dernier signe cardinal de (19) peut se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{G}\cap(\mathcal{S}(P\wedge R))^2 \quad (21)$$

dont le cardinal se met par conséquent sous la forme :

$$\square\{n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k')[n(i'\wedge k')-1]/(i,k)\neq(i',k')\}$$
$$+\square\{n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k')\,n(i''\wedge k'')/(\{i\wedge k,i'\wedge k'\},\{i\wedge k,i''\wedge k''\})\in\mathfrak{G}(I\times K)\}, \quad (22)$$

où $\mathfrak{G}(I\times K)$ est l'ensemble des couples de paires d'éléments de $\{1,2,\ldots,I\}\times\{1,2,\ldots,K\}$, ayant une composante commune.

La proportion cherchée se met ainsi sous la forme du rapport entre l'expression (22) et celle (20).

4-$\mathfrak{S}$.s'.2- <u>calcul de $\square\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in\mathfrak{G}\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}\}$.</u>

Cette expression vaut

$$\mathrm{card}[\mathfrak{G}\cap(\mathcal{R}(Q))^{[2]}\cap(\mathcal{S}(P))^{[2]}]=\mathrm{card}[\mathfrak{G}\cap(\mathcal{S}(P\wedge Q))^{[2]}]$$
$$=\square\{n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j')[n(i'\wedge j')-1]/(i,j)\neq(i',j')\}$$
$$+\square\{n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j')\,n(i''\wedge j'')/(\{i\wedge j,i'\wedge j'\},\{i\wedge j,i''\wedge j''\})\in\mathfrak{G}(I\times J)\}. \quad (23)$$

4-$\mathfrak{S}$.r.s- <u>calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in\mathfrak{G}\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]$.</u>

Avec des notations que l'on comprend parce que analogues à celles ci-dessus, on introduit le cardinal moyen $r[(p,q)/(p,q)\in\mathfrak{G}\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]$. Une relation de même type que celles (15) et (18) ci-dessus nous montre que la proportion que représente cette espérance peut se mettre sous la forme

$$r[(p,q)/(p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]/r[(n;t),P]$$

$$=\mathrm{card}[G\cap(\mathcal{R}(R)^{[2]}\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P)))]/\mathrm{card}[G\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]. \quad (24)$$

Il nous reste à évaluer les cardinaux du dernier rapport. On obtient

$$\mathrm{card}[G\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]=\sum_{1\leqslant i\neq i'\leqslant I} n(i)[n(i)-1]n(i'). \quad (25)$$

L'ensemble sous le signe cardinal du numérateur du deuxième membre de (24), se met sous la forme

$$\mathrm{card}\{G\cap[(\sum_{1\leqslant k\leqslant K} P_2(G_k))\cap(\sum_{1\leqslant i\leqslant I} P_2(E_i))]$$

$$\times[(\sum_{1\leqslant k'\leqslant K} P_2(G_{k'}))\cap(\sum_{1\leqslant i'\leqslant i''\leqslant I} E_{i'}*E_{i''})], \quad (26)$$

son cardinal est par conséquent égal à

$$\sum\{n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]n(i'\wedge k)/1\leqslant i\neq i'\leqslant I, 1\leqslant k\leqslant K\}. \quad (27)$$

Précisons que si la somme (25) comporte $I(I-1)$ termes, celle (27) comporte $I(I-1)K$ termes.

La proportion cherchée se met alors sous la forme d'un rapport dont le numérateur est fourni par l'expression (27) et le dénominateur par celle (25).

4-3.r'.s'_calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in G\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))$.

Cette expression représente

$$\mathrm{card}[G\cap(\mathcal{R}(Q))^{[2]}\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]$$

qui s'exprime comme suit en fonction des cardinaux des classes :

$$\sum \{ n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\, n(i'\wedge j') \,/\, 1\leqslant i,i'\leqslant I,\ 1\leqslant j,j'\leqslant J,\ (i',j')\neq(i,j) \}. \quad (28).$$

4-h.r.2- <u>calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}]$.</u>

Toujours avec le même type de notations cette espérance est représentée par la proportion

$$r[(p,q)/(p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}]\,/\,r[(n;t),P], \quad (29)$$

qu'on détermine à partir de l'identité

$$r[(p,q)/(p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}]\times \mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}]$$
$$= r[(n;t),P]\times \mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(R))^{[2]}\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}], \quad (30)$$

obtenue de la même façon que celle (15) ci-dessus.

On a

$$\mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(P)^{[2]})] = \sum_{1\leqslant i\leqslant I} n(i)[n(i)-1][n(i)-2][n(i)-3]/4$$
$$+\sum_{1\leqslant i\neq i'\leqslant I} n(i)[n(i)-1]\,n(i')[n(i')-1]/4. \quad (31)$$

D'autre part, en notant que

$$\mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(R))^{[2]}\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}] = \mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(P\wedge R))^{[2]}],$$

on a pour ce dernier cardinal l'expression

$$\sum\{ n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1][n(i\wedge k)-2][n(i\wedge k)-3]/4 \,/\, 1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant k\leqslant K \}$$
$$+\sum\{ n(i\wedge k)[n(i\wedge k)-1]\, n(i'\wedge k')[n(i'\wedge k')-1]/4 \,/\, 1\leqslant i,i'\leqslant I,\ 1\leqslant k,k'\leqslant K,\ (i,k)\neq(i',k') \}.$$
$$(32)$$

Finalement la proportion cherchée (29) est fournie par un rapport dont le numérateur (resp. dénominateur) est donné par l'expression (32) (resp. (31)).

4-h.r'.2- <u>calcul de $\sum\{\varphi(p)\varphi(q)/(p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P))^{[2]}\}$.</u>

Cette dernière somme représente

$$\mathrm{card}\,[H \cap (\mathcal{R}(Q))^{[2]} \cap (\mathcal{R}(P))^{[2]}],$$

elle vaut, compte tenu de l'énumération effectuée dans le cadre de la formule (32),

$$\sum \{ n(i \wedge j)[n(i \wedge j)-1][n(i \wedge j)-2][n(i \wedge j)-3]/4 \;/\; 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J \}$$

$$+\sum \{ n(i \wedge j)[n(i \wedge j)-1]\, n(i' \wedge j')[n(i' \wedge j')-1]/4 \;/\; 1 \leqslant i, i' \leqslant I,\ 1 \leqslant j, j' \leqslant I,\ (i,j) \neq (i',j') \}. \quad (33)$$

4-h.s.2- calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q) \in H \cap (\mathcal{S}(P))^{[2]}]$.

Cette espérance représente la proportion suivante: $r[(p,q)/(p,q) \in H \cap (\mathcal{S}(P))^{[2]}] / r[(n;t), P]$ qui est égale au rapport

$$\mathrm{card}\,[H \cap (\mathcal{R}(R))^{[2]} \cap (\mathcal{S}(P))^{[2]}] / \mathrm{card}\,[H \cap (\mathcal{S}(P))^{[2]}]. \quad (34)$$

On a

$$(\mathcal{S}(P))^2 = \left(\sum \{ E_i * E_{i'} / \{i,i'\} \in P_2(I)\}\right) \times \left(\sum \{ E_{i''} * E_{i'''} / \{i'', i'''\} \in P_2(I)\}\right)$$

où $P_2(I)$ désigne l'ensemble des paires (i.e. parties à deux éléments) de $\{1, 2, \ldots, I\}$. On peut décomposer $(\mathcal{S}(P))^2$ sous la forme :

$$\sum \{ (E_i * E_{i'}) \times (E_i * E_{i'}) / \{i,i'\} \in P_2(I)\}$$
$$+ \sum \{ (E_i * E_{i'}) \times (E_i * E_{i''}) / (\{i,i'\},\{i,i''\}) \in G(I)\}$$
$$+ \sum \{ (E_i * E_{i'}) \times (E_{i''} * E_{i'''}) / (\{i,i'\},\{i'',i'''\}) \in H(I)\}, \quad (35)$$

où, rappelons-le, $G(I)$ (resp. $H(I)$) désigne l'ensemble des couples de paires de $\{1, 2, \ldots, I\}$ ayant (resp. n'ayant pas) de composante commune.

Il en résulte que

$$\mathrm{card}\,[H \cap (\mathcal{S}(P))^{[2]}] = \mathrm{card}\,[H \cap (\mathcal{S}(P))^{2}] =$$

$$\sum \{ n(i)\,[n(i)-1]\,n(i')\,[n(i')-1] \;/\; \{i,i'\} \in P_2(I) \}$$

$$+ \sum \{ n(i)\,[n(i)-1]\,n(i')\,n(i'') \;/\; (\{i,i'\},\{i,i''\}) \in G(I) \}$$

$$+ \sum \{ n(i)\,n(i')\,n(i'')\,n(i''') \;/\; (\{i,i'\},\{i'',i'''\}) \in H(I) \}. \qquad (36).$$

Maintenant,

$$H \cap (\mathcal{R}(R))^{[2]} \cap (\mathcal{S}(P))^{[2]} = H \cap (\mathcal{S}(P \wedge R))^{2}, \qquad (37)$$

par conséquent, le numérateur de (34) peut s'écrire sous la forme :

$$\sum \{ n(i\wedge k)\,[n(i\wedge k)-1]\,n(i'\wedge k')\,[n(i'\wedge k')-1] \;/\; \{i\wedge k, i'\wedge k'\} \in P_2(I\times K) \}$$

$$+ \sum \{ n(i\wedge k)\,[n(i\wedge k)-1]\,n(i'\wedge k')\,n(i''\wedge k'') \;/\; (\{i\wedge k, i'\wedge k'\},\{i\wedge k, i''\wedge k''\}) \in G(I\times K) \}$$

$$+ \sum \{ n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k')\,n(i''\wedge k'')\,n(i'''\wedge k''') \;/\; (\{i\wedge k, i'\wedge k'\},\{i''\wedge k'', i'''\wedge k'''\}) \in H(I\times K) \}, \qquad (38)$$

avec des notations que l'on comprend.

La proportion (34) se met donc sous la forme du rapport de l'expression (38) sur celle (36).

4-h.s'.2- <u>calcul de $\sum \{ \varphi(p)\,\varphi(q) \;/\; (p,q) \in H \cap (\mathcal{S}(P))^{[2]} \}$.</u>

Cette expression peut être représentée par

$$\mathrm{card}\,[H \cap (\mathcal{S}(P\wedge Q))^{2}] \qquad (39)$$

(cf. formule (37) ci-dessus). Elle prend par conséquent une forme analogue à celle (38), soit

$$\sum \{ n(i\wedge j)\,[n(i\wedge j)-1]\,n(i'\wedge j')\,[n(i'\wedge j')-1] \;/\; \{i\wedge j, i'\wedge j'\} \in P_2(I\times J) \}$$

+

$$\sqcup\{n(i\wedge j)[n(i\wedge j)-1]\,n(i'\wedge j')\,n(i''\wedge j'')\,/\ (\{i\wedge j,i'\wedge j'\},\{i\wedge j,i''\wedge j''\})\in G(I\times J)\}$$

$$+\sqcup\{n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j')\,n(i''\wedge j'')\,n(i'''\wedge j''')\,/\ (\{i\wedge j,i'\wedge j'\},\{i''\wedge j'',i'''\wedge j'''\})\in H(I\times J)\},\quad (40),$$

avec des notations que l'on comprend étant entendu que deux éléments $i\wedge j$ et $i'\wedge j'$ de $I\times J$ sont distincts si et seulement si $i\neq i'$ ou $i'\neq j'$.

4-h.r.s- <u>calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(p)\Psi'(q)/(p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]$.</u>

Cette espérance représente la proportion suivante :

$$r[(p,q)/(p,q)\in H\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]/r[(n;t),P]$$
$$=\mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(R))^2\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]/\mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))].(41).$$

On a

$$\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P)=(\sqcup\{P_2(E_i)/1\leqslant i\leqslant I\})\times(\sqcup\{E_{i'}*E_{i''}/1\leqslant i<i'\leqslant I\})$$

$$=\sqcup\{P_2(E_i)\times(E_i*E_{i'})/\ 1\leqslant i\neq i'\leqslant I\}$$
$$+\sqcup\{P_2(E_i)\times(E_{i'}*E_{i''})/1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant i'<i''\leqslant I\ ;\ i'\neq i,i''\neq i\}.\quad(42).$$

Dans ces conditions,

$$\mathrm{card}[H\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))]=\sqcup\{\tfrac{1}{2}n(i)[n(i)-1][n(i)-2]n(i')/\ 1\leqslant i\neq i'\leqslant I\}$$
$$+\sqcup\{\tfrac{1}{2}n(i)[n(i)-1]\,n(i')\,n(i'')/1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant i'<i''\leqslant I;\ i'\neq i,\ i''\neq i\}.\quad(43)$$

L'ensemble $(\mathcal{R}(R))^2\cap(\mathcal{R}(P)\times\mathcal{S}(P))$ peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{R}(P\wedge R)\times[\mathcal{R}(R)\cap\mathcal{S}(P)]=\sqcup\{P_2(G_{ik})/\ 1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant k\leqslant K\}$$
$$\times[(\sqcup\{P_2(G_{k'})/1\leqslant k'\leqslant K\})\cap(\sqcup\{E_{i'}*E_{i''}/1\leqslant i'<i''\leqslant I\})],\quad(44).$$

de sorte que le cardinal représenté au dénominateur de (41) est égal à

$$\sum \{ \tfrac{1}{2}\, n(i \wedge k)[n(i \wedge k)-1][n(i \wedge k)-2]\, n(i' \wedge k) / 1 \leq i \neq i' \leq I,\ 1 \leq k \leq K \}$$

$$+ \sum \{ \tfrac{1}{2}\, n(i \wedge k)[n(i \wedge k)-1]\, n(i' \wedge k')\, n(i'' \wedge k') / 1 \leq i, i', i'' \leq I, i' < i'', 1 \leq k, k' \leq K,\ (i', k') \neq (i, k) \text{ et } (i'', k') \neq (i, k) \}. \quad (45).$$

La proportion cherchée (voir formule (41)) se met dans ces conditions sous la forme du rapport de l'expression (45) sur celle (43).

4-h.r'.s'- calcul de $\sum \{ \varphi(p)\varphi(q) / (p,q) \in H \cap (\mathcal{R}(P) \times \mathcal{S}(P)) \}$.

Cette expression représente

$$\mathrm{card}\,[H \cap (\mathcal{R}(Q))^{[2]} \cap (\mathcal{R}(P) \times \mathcal{S}(P))] \qquad (46)$$

qui en vertu du dernier développement (45) vaut

$$\sum \{ \tfrac{1}{2}\, n(i \wedge j)[n(i \wedge j)-1][n(i \wedge j)-2]\, n(i' \wedge j) / 1 \leq i \neq i' \leq I,\ 1 \leq k \leq K \}$$

$$+ \sum \{ \tfrac{1}{2}\, n(i \wedge j)[n(i \wedge j)-1]\, n(i' \wedge j')\, n(i'' \wedge j') / 1 \leq i, i', i'' \leq I, i' < i'', 1 \leq j, j' \leq J,\ (i', j') \neq (i, j) \text{ et } (i'', j') \neq (i, j) \}. \quad (47).$$

Nous désignerons dans l'énoncé suivant par γ(g.r.2.), γ(g.r'.2), γ(h.r.2), γ(h.r'.2), γ(g.s.2), γ(g.s'.2.), γ(h.s.2.), γ(h.s'.2), γ(g.r.s.), γ(g.r'.s'.), γ(h.r.s.) et γ(h.r'.s') les expressions respectivement calculées aux paragraphes 4-g.r.2., 4-g.r'.2., 4-h.r.2., 4-h.r'.2., 4-g.s.2., 4-g.s'.2., 4-h.s.2., 4-h.s'.2., 4.g.r.s., 4-g.r'.s', 4-h.r.s. et 4-h.r'.s'.

THEOREME 1- La moyenne $\mu_1(\beta, \gamma'; \alpha)$ de la v.a. $S_1(\beta, \gamma'; \alpha)$ est donnée par l'expression (9) ci-dessus. La variance $\mathrm{var}._1(\beta, \gamma'; \alpha)$ de cette v.a. est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} var._1(\beta,\gamma';\alpha) = {} & \mu_1(\beta,\gamma';\alpha) + \gamma(g.r.2.)\gamma(g.r'.2) + \gamma(h.r.2.)\gamma(h.r'.2.) \\ & + \gamma(g.s.2.)\gamma(g.s'.2) + \gamma(h.s.2.)\gamma(h.s'.2) \\ & + 2[\gamma(g.r.s)\gamma(g.r'.s') + \gamma(h.r.s.)\gamma(h.r'.s')] \\ & -(\mu_1(\beta,\gamma';\alpha))^2 . \end{aligned} \tag{48}$$

L'indice d'association partielle $r_{\beta\gamma.\alpha}$ est donné par la formule

$$r_{\beta\gamma.\alpha} = [s(\beta,\gamma) - \mu_1(\beta,\gamma';\alpha)] / \sqrt{var_1(\beta,\gamma';\alpha)} \tag{49}$$

où $s(\beta,\gamma)$ est l'indice brut déjà défini par la formule (1) du paragraphe IV.2 ci-dessus.

Les expressions rentrant dans la composition de la formule (48) peuvent paraître complexes d'un point de vue analytique, toutefois, leur programmation sur ordinateur, bien que délicate au niveau de l'indexation à gérer, ne doit pas présenter de trop grande difficulté. Il sera alors intéressant de comparer les comportements respectifs des deux indices $\rho_{\beta\gamma.\alpha}$ (cf. § IV.2 précédent) et $r_{\beta\gamma.\alpha}$ correspondants aux deux formes de l'h.a.l. locale et globale.

On a pu remarquer la symétrie des expressions de la moyenne $\mu_1(\beta,\gamma';\alpha)$ et de la variance $var_1(\beta,\gamma';\alpha)$ par rapport aux cardinaux des classes de $P\wedge Q$ d'une part et de $P\wedge R$ d'autre part. De sorte que le résultat aurait été le même si les calculs avaient été effectués par rapport à la v.a., définie en fait à partir de ses moments :

$$S_1(\beta',\gamma;\alpha) = \sum\{\varphi'(p)\psi(p) / p \in \mathcal{R}(P)\} + \sum\{\varphi'(p)\psi(p) / p \in \mathcal{S}(P)\}., \tag{50}$$

En décomposant l'ensemble $(P_2(E))^{[q]}$ des q-uples de paires dont deux quelconques sont distinctes, en sous ensembles dont chacun est formé des q-uples de paires de même configuration (cf. [LERMAN (1973)]), on peut montrer que le moment absolu d'ordre quelconque fixé, calculé « globalement » de la même manière que l'ont été la moyenne et le moment d'ordre 2, de la v.a. $S_1(\beta, \gamma'; \alpha)$ est identique à celui de la v.a. $S_1(\beta', \gamma; \alpha)$. Dans ces conditions, on peut avancer la propriété suivante :

THEOREME 2 – Dans le cadre de l'h.a.l. à caractère partiel et « global » (cf. § 1. ci-dessus), la distribution de la v.a. $S_1(\beta, \gamma'; \alpha)$ est la même que celle de la v.a. $S_1(\beta', \gamma; \alpha)$, où la partition aléatoire Q' est définie de façon conforme à celle de R'.

V – COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX VARIABLES QUALITATIVES ORDINALES, PARTIELLE RELATIVEMENT A UNE TROISIEME VARIABLE QUALITATIVE ORDINALE.

Cette étude sera en tout point parrallèle à celle qui précède (§ IV.2 et § IV.3). Nous désignerons par η et θ les deux variables qualitatives ordinales dont il s'agit de mesurer le lien en neutralisant l'effet d'une troisième variable qualitative ordinale ζ. Le support de l'information (tables de contingence) étant le même que ci-dessus, il est naturel que les notations que nous adopterons ici soient proches de celles du paragraphe précédent ; mais il faut absolument se garder de confondre les deux situations !

Aucune ambiguïté n'étant possible, nous désignerons par ζ, η et θ les trois préordres totaux sur E respectivement induits par les trois variables ζ, η et θ. On notera respectivement

$$\begin{array}{lll} & \{E_i \,/\, 1 \leq i \leq I\} & \text{l'ensemble des classes de } \zeta, \\ & \{F_j \,/\, 1 \leq j \leq J\} & \text{l'ensemble des classes de } \eta \\ \text{et} & \{G_k \,/\, 1 \leq k \leq K\} & \text{l'ensemble des classes de } \theta. \end{array} \qquad (1)$$

où l'indexation des classes d'un même préordre est naturellement conforme à l'ordre quotient sur les classes défini par ce préordre.

Les compositions des préordres ς, η et θ seront respectivement notées $(n(1), n(2), \ldots, n(i), \ldots, n(I))$, $(n(1), n(2), \ldots, n(j), \ldots, n(J))$ et $(n(1), n(2), \ldots, n(k), \ldots, n(K))$ où $n(i) = card(E_i)$, $n(j) = card(F_j)$ et $n(k) = card(G_k)$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$ et $1 \leq k \leq K$.

La position relative entre deux préordres totaux est déterminée par le tableau de contingence de leur croisement. On aura dans ces conditions à considérer les trois tableaux de contingence suivants, respectivement associés aux croisements deux à deux des préordres $\varsigma \wedge \eta$, $\varsigma \wedge \theta$ et $\eta \wedge \theta$:

$$\begin{aligned} n(\varsigma \wedge \eta) &= \{n(i \wedge j) / 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J\} \\ n(\varsigma \wedge \theta) &= \{n(i \wedge k) / 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq K\} \qquad (2) \\ n(\eta \wedge \theta) &= \{n(j \wedge k) / 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K\} \end{aligned}$$

où $n(i \wedge j) = card(E_i \cap F_j)$, $n(i \wedge k) = card(E_i \cap G_k)$ et $n(j \wedge k) = card(F_j \cap G_k)$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$.

Rappelons ([LERMAN (1973)]) qu'on représente un même préordre total dans $E^{[2]}$ par l'ensemble des couples d'objets (x,y) tels que x précède strictement y ; ainsi ς, η et θ sont respectivement représentés par

$$\begin{aligned} R(\varsigma) &= \bigcup \{E_i \times E_{i'} / 1 \leq i < i' \leq I\}, \\ R(\eta) &= \bigcup \{F_j \times F_{j'} / 1 \leq j < j' \leq J\}, \qquad (3) \\ \text{et} \quad R(\theta) &= \bigcup \{G_k \times G_{k'} / 1 \leq k < k' \leq K\}. \end{aligned}$$

V.1- cas d'un indice d'association partielle conforme à l'indice de Lerman dans le cadre d'une h.a.l. à caractère local.

1_INDICE BRUT ET H.A.L.

L'indice définitif que nous cherchons dans ce paragraphe V.1 sera désigné par $\ell_{\eta\theta\cdot\xi}$. L'indice brut est le même que dans le cas total, il prend la forme suivante

$$s(\eta,\theta) = \mathrm{card}\,[R(\eta)\cap R(\theta)] = \sum\{n(j\wedge k)\,n(j'\wedge k')/1\leq j<j'\leq J,\ 1\leq k<k'\leq K.\} \quad (4)$$

Comme dans le cas total [LERMAN (1973)], on fixe l'un des deux préordres totaux η ou θ et on associe à l'autre un préordre aléatoire en montrant que la distribution de la v.a. associée à $s(\eta,\theta)$ ne dépend pas de celui des deux préordres totaux fixé.

Comme dans le cas de comparaison partielle de partitions (cf. § IV.2 ci-dessus), nous allons fixer le préordre total η et associer à θ, un préordre aléatoire θ' dont la suite des classes est notée $\{G'_k\ /\ 1\leq k\leq K\}$ où G'_k est la partie aléatoire de E associée à G_k, $1\leq k\leq K$, dans une h.a.l. qui préserve la position relative des classes du préordre aléatoire par rapport aux classes du préordre ξ. Dans ces conditions, G'_k sera défini sous la forme de la somme ensembliste

$$G'_k = \sum_{1\leq i\leq I} G'_{ki}\ , \qquad (5)$$

pour tout $k=1,2,\ldots,K$, où $(G'_{k1}, G'_{k2},\ldots,G'_{ki},\ldots,G'_{kI})$ est une suite de parties aléatoires indépendantes ; G'_{ki} étant pris uniformément au hasard dans l'ensemble des parties de E_i de même cardinal $n(i\wedge k)$.

Soit par conséquent la décomposition suivante de $E\times E$:

$$E\times E = \sum\{E_i\times E_{i'}\ /\ (i,i')\in \bar{I}\times\bar{I}\} \qquad (6)$$

(somme ensembliste), où $\bar{I}$ désigne l'ensemble $\{1,2,\ldots,i,\ldots,I\}$, par rapport à laquelle l'ensemble aléatoire $R(\theta')$ se met sous la forme :

$$R(\theta') = \sum\{(E_i\cap G'_k)\times(E_{i'}\cap G'_{k'})/1\leq i,i'\leq I,\ 1\leq k<k'\leq K\}. \quad (7)$$

Introduisons à présent les fonctions indicatrices φ (resp. ψ et ψ')

des sous ensembles $R(\eta)$ (resp. $R(\theta)$ et $R(\theta')$), la v.a. $S(\eta,\theta')$ se met alors sous la forme

$$S(\eta,\theta') = \sum\{\varphi(x,y)\,\Psi'(x,y) / (x,y)\in E\times E\}$$

$$= \sum\{\sum\{\varphi(u)\Psi'(u) / u\in E_i\times E_{i'}\} / (i,i')\in \bar{I}\times\bar{I}\}. \quad (8)$$

Nous allons calculer dans le cadre de l'h.a.l. exprimée, la moyenne et la variance de cette v.a.. C'est en effet, conformément à la démarche générale, l'indice $s(\eta,\theta)$ centré et réduit qui définira le coefficient définitif $\rho_{\eta\theta.e}$.

2. CALCUL DE LA MOYENNE DE LA V.A. $S(\eta,\theta';\zeta)$.

Nous aurons besoin pour ce calcul d'évaluer

$$Pr\{\Psi'(x,y) = 1 / (x,y)\in E_i\times E_i\} \quad (9)$$

$$\sum\{\varphi(x,y) / (x,y)\in E_i\times E_i\} \quad (9')$$

$$Pr\{\Psi'(x,y) = 1 / (x,y)\in E_i\times E_{i'}\} \quad (10)$$

$$\sum\{\varphi(x,y) / (x,y)\in E_i\times E_{i'}\}, \quad (10')$$

pour $1\leq i\neq i'\leq I$.

Désignons par θ_i (resp. θ'_i) la restriction du préordre total θ (resp. θ') à la classe E_i ; ainsi, la suite des classes du préordre total θ'_i se trouve définie par $\{G'_{ki} / 1\leq k\leq K\}$. La composition de ce préordre est $\{n(i\wedge k)/1\leq k\leq K\}$.

L'expression (9) représente la proportion de préordres totaux θ'_i sur E_i de composition fixée, qui placent l'objet x dans une classe d'indice k, l'objet y dans une classe d'indice k' de telle sorte que k soit strictement inférieur à k'. Cette proportion vaut

$$\sum\left\{\frac{n(i\wedge k)\,n(i\wedge k')}{n(i)\,[n(i)-1]} \middle/ 1\leq k<k'\leq K\right\}. \quad (11)$$

D'autre part, l'expression (9') représente le nombre de couples d'objets de la classe E_i qui appartiennent à $R(\eta)$. Il s'agit du cardinal de $R(\eta_i)$ si on désigne par η_i la restriction du préordre total η à la classe E_i. On notera $\{F_{ji} / 1 \leq j \leq J\}$ la suite des classes du préordre total η_i qui est de composition $\{n(i \wedge j) / 1 \leq j \leq J\}$. L'expression (9') vaut donc

$$\sum \{n(i \wedge j)\, n(i \wedge j') / 1 \leq j < j' \leq J\}. \qquad (12)$$

L'expression (10) représente la proportion de couples $(\theta'_i, \theta'_{i'})$ de préordres totaux tels que θ'_i place l'objet x dans sa k-ème classe, $\theta'_{i'}$ place l'objet y dans sa k'-ème classe, avec $k < k'$. Cette proportion est égale à

$$\sum \left\{ \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k')}{n(i)\, n(i')} \Big/ 1 \leq k < k' \leq K \right\}. \qquad (13)$$

L'expression (10') représente le nombre de couples d'objets (x,y) tels que x (resp. y) appartient à la j-ème (resp. j'-ème) classe de η_i (resp. $\eta_{i'}$), avec $j < j'$. Ce cardinal est égal à

$$\sum \{ n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j') / 1 \leq j < j' \leq J \}. \qquad (14)$$

Pour le calcul de l'espérance mathématique de la v.a. $S(\eta, \theta'; \varsigma)$, nous décomposerons l'expression (8) en deux morceaux :

$$\sum \{ \sum \{ \varphi(u)\, \psi'(u) / u \in E_i \times E_i \} / i \in \bar{I} \}$$
$$+ \sum \{ \sum \{ \varphi(u)\, \psi'(u) / u \in E_i \times E_{i'} \} / (i,i') \in \bar{I}^{[2]} \}, \qquad (15)$$

où, rappelons le, $\bar{I}^{[2]} = \bar{I} \times \bar{I} - \Delta(\bar{I} \times \bar{I})$ désigne l'ensemble des couples (i, i') tels que $i \neq i'$.

En appliquant l'opérateur espérance, on obtient

$$\mu(\eta, \theta'; \varsigma) = \sum \Big\{ \sum \Big\{ \frac{n(i \wedge j)\, n(i \wedge j')\, n(i \wedge k)\, n(i \wedge k')}{n(i)\,[n(i) - 1]} \Big/$$
$$1 \leq j < j' \leq J,\ 1 \leq k < k' \leq K \Big\} \Big/ 1 \leq i \leq I \Big\}$$
$$+ \sum \Big\{ \sum \Big\{ \frac{n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j')\, n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k')}{n(i)\, n(i')} \Big/$$
$$1 \leq j < j' \leq J,\ 1 \leq k < k' \leq K \Big\} \Big/ (i,i') \in \bar{I}^{[2]} \Big\}. \qquad (16)$$

4- CALCUL DE LA VARIANCE DE LA V.A. $S(\eta,\theta';\xi)$.

Comme pour le cas de la comparaison de partitions, toute la difficulté va résider dans l'expression et l'évaluation du moment d'ordre 2. Le carré de l'expression (15) peut se mettre sous la forme

$$\sum\{\varphi(u)\psi'(u)/u\in\sum\{E_i\times E_i/i\in\bar{I}\}\}$$

$$+\sum\{\varphi(u)\psi'(u)/u\in\sum\{E_i\times E_{i'}/(i,i')\in\bar{I}^{[2]}\}\}$$

$$+\sum\Big\{\varphi(u)\varphi(v)\psi'(u)\psi'(v)/(u,v)\in\Big(\sum_{i\in\bar{I}}E_i\times E_i\Big)\times\Big(\sum_{i'\in\bar{I}}E_{i'}\times E_{i'}\Big)\Big\}$$

$$+\sum\Big\{\varphi(u)\varphi(v)\psi'(u)\psi'(v)/(u,v)\in\Big(\sum_{\bar{I}^{[2]}}E_i\times E_{i'}\Big)\times\Big(\sum_{\bar{I}^{[2]}}E_{i''}\times E_{i'''}\Big)\Big\}$$

$$+2\sum\Big\{\varphi(u)\varphi(v)\psi'(u)\psi'(v)/(u,v)\in\Big(\sum_{\bar{I}}E_i\times E_i\Big)\times\Big(\sum_{\bar{I}^{[2]}}E_{i'}\times E_{i''}\Big)\Big\}, \qquad (17)$$

où $u\neq v$ et où les différentes sommes à l'intérieur des accolades sont ensemblistes.

La détermination de l'espérance mathématique de (17) nécessite la reconnaissance des différentes structures propres d'un couple de couples d'objets selon les répétitions qui peuvent se produire d'un même objet. On peut voir qu'un couple de couples d'objets $((x,y),(x',y'))$ de $(E^{[2]})^{[2]}$ peut prendre les cinq formes différentes suivantes où des lettres distinctes représentent des objets différents :
$((x,y),(x,t))$, $((x,y),(z,x))$, $((x,y),(z,y))$, $((x,y),(y,t))$ et $((x,y),(z,t))$.

A cette dernière suite, nous associons respectivement la suite des classes $\mathcal{G}_1(E)$, $\mathcal{G}'_1(E)$, $\mathcal{G}_2(E)$, $\mathcal{G}'_2(E)$ et $H(E)$, où une même classe est formée de l'ensemble des éléments $((x,y),(x',y'))$ de même forme. Ces classes forment une partition de $(E^{[2]})^{[2]}$.

D'autre part, la structure propre d'un élément $((i,i'),(i'',i'''))$ de $(\bar{I}\times\bar{I})\times(\bar{I}\times\bar{I})$ peut être l'une des suivantes:

$$((i,i),(i,i)),$$
$$((i,i),(i,i_4)),\ ((i,i),(i_3,i)),\ ((i,i_2),(i,i)),\ ((i_1,i),(i,i)),$$
$$((i,i),(i_3,i_4)),\ ((i,i_2),(i,i_4)),\ ((i_1,i),(i,i_4)),\ ((i,i_2),(i_3,i)),$$
$$((i_1,i),(i_3,i)),\ ((i_1,i_2),(i,i)),$$
$$((i_1,i_1),(i_3,i_3)),\ ((i_1,i_2),(i_1,i_2)),\ ((i_1,i_2),(i_2,i_1))$$
$$((i_1,i_2),(i_3,i_4)), \tag{18}$$

où des symboles différents représentent des éléments différents de $\bar{I}$.

La décomposition de $(\bar{I}\times\bar{I})\times(\bar{I}\times\bar{I})$ conformément à la suite ordonnée des différentes configurations précédentes, donne

$$\begin{aligned}(\bar{I}\times\bar{I})\times(\bar{I}\times\bar{I}) = {} & L(\bar{I})+K_4(\bar{I})+K_3(\bar{I})+K_2(\bar{I})+K_1(\bar{I})\\ & +G(\bar{I})+G_1(\bar{I})+G_2'(\bar{I})+G_1'(\bar{I})+G_2(\bar{I})+G'(\bar{I})\\ & +\Delta(\bar{I})+D(\bar{I})+D'(\bar{I})\\ & +H(\bar{I}).\end{aligned} \tag{19}$$

C'est pour des raisons très précises de calcul que nous avons présenté d'une manière qui peut paraître redondante les décompositions de $(E^{[2]})^{[2]}$ et de $(\bar{I}\times\bar{I})\times(\bar{I}\times\bar{I})$. En effet, les deux expressions associées de la forme

$$\mathcal{E}[\Psi'(x,y)\,\Psi'(x',y')/((x,y),(x',y'))\in(E_i\times E_{i'})\times(E_{i''}\times E_{i'''})] \tag{20}$$

$$\sqsubset\{\varphi(x,y)\,\varphi(x',y')/((x,y),(x',y'))\in(E_i\times E_{i'})\times(E_{i''}\times E_{i'''})\} \tag{20'}$$

dépendront chacune et de la même façon de la structure propre de $((x,y),(x',y'))$ qui appartient à $(E^{[2]})^{[2]}$, ainsi que de celle de $((i,i'),(i'',i'''))$ qui appartient à $(\bar{I}\times\bar{I})\times(\bar{I}\times\bar{I})$. Si V désigne la structure de (u,v) ($V = G_1, G_1', G_2, G_2'$ ou H) et W celle de $((i,i'),(i'',i'''))$ ($W = L, K_1, K_2, K_3, K_4, G, G', G_1, G_1', G_2, G_2', \Delta, D, D'$ ou H), on notera $\gamma(V,\iota)$ (resp. $c(V,\iota)$) l'expression (20) (resp. (20')), où ι indique le quatre-uplet $((i,i'),(i'',i'''))$.

On peut remarquer que certaines structures W ne se rencontrent pas dans le développement de l'expression (17). D'autre part et surtout le coefficient $\gamma(V,\iota)$ (resp. $c(V,\iota)$) est, en vertu de la structure de partition de $\{E_i \mid 1 \leq i \leq I\}$, nul pour de nombreux couples (V,W).

En fait, si $\gamma(V,\iota)$ représente une proportion, $c(V,\iota)$ représente un cardinal dont la forme sera la même que celle du numérateur de $\gamma(V,\iota)$.

Les structures de (V,W) pour lesquels le coefficient γ (resp. c) n'est pas nul sont :

$$\begin{array}{l}
(G_1,L),\ (G_1,K_4),\ (G_1,K_2),\ (G_1,G_1),\ (G_1,D),\\
(G_1',L),\ (G_1',K_3),\ (G_1',K_2),\ (G_1',G_1'),\ (G_1',D'),\\
(G_2,L),\ (G_2,K_3),\ (G_2,K_1),\ (G_2,G_2),\ (G_2,D),\\
(G_2',L),\ (G_2',K_4),\ (G_2',K_1),\ (G_2',G_2'),\ (G_2',D'),\\
(H,L),\ (H,K_4),\ (H,K_3),\ (H,K_2),\ (H,K_1),\\
(H,G),\ (H,G_1),\ (H,G_2'),\ (H,G_1'),\ (H,G_2),\ (H,G'),\\
(H,\Delta),\ (H,D),\ (H,D')
\end{array} \qquad (21)$$

et (H,H) ; soit 35 formes.

Considérons les trois sommes pour (u,v) $(u \neq v)$ de l'expression (17). Les structures rencontrées dans leur développement de l'indice $((i,i'),(i'',i'''))$, sont respectivement : L et Δ pour la première somme, $G_1, G_2', G_1', G_2, D, D'$ et

H pour la deuxième somme, enfin K_4, K_3 et G pour la troisième somme. Désignons par $\Gamma(V,W)$ la somme des produits $\gamma(V,\iota)c(V,\iota)$ pour ι décrivant W :

$$\Gamma(V,W)=\sum\{\gamma(V,\iota)c(V,\iota)/\iota\in W\} \quad . \quad (22)$$

Avec les notations précédentes, on a le théorème suivant:

<u>THEOREME 1</u>- Le moment absolu d'ordre 2 de la v.a. $S(\eta,\theta';\varsigma)$ est donné par la formule :

$$\begin{aligned}\mu_2(\eta,\theta';\varsigma)= {} & \mu(\eta,\theta';\varsigma)+\Gamma(G_1,L)+\Gamma(G'_1,L)+\Gamma(G_2,L)+\Gamma(G'_2,L)\\ & +\Gamma(H,L)+\Gamma(H,\Delta)\\ & +\Gamma(G_1,G_1)+\Gamma(G_1,D)+\Gamma(G'_1,G'_1)+\Gamma(G'_1,D')+\Gamma(G_2,G_2)\\ & +\Gamma(G_2,D)+\Gamma(G'_2,G'_2)+\Gamma(G'_2,D')+\Gamma(H,G_1)+\Gamma(H,G'_1)\\ & +\Gamma(H,G_2)+\Gamma(H,G'_2)+\Gamma(H,D)+\Gamma(H,D')+\Gamma(H,H)\\ & +2\,[\,\Gamma(G_1,K_4)+\Gamma(G'_1,K_3)+\Gamma(G_2,K_3)+\Gamma(G'_2,K_4)\\ & \quad +\Gamma(H,K_4)+\Gamma(H,K_3)+\Gamma(H,G)\,] \;. \qquad (23)\end{aligned}$$

où $\mu(\eta,\theta';\varsigma)$ a été défini par la formule (16) ci-dessus.

Chacune des expressions composantes précédentes de la forme $\gamma(V,\iota)$ (resp. $c(V,\iota)$) se calcule parfaitement en fonction de la table de contingence de croisement entre les deux préordres totaux θ et ς (resp. η et ς). Toutefois, il serait ici trop long d'effectuer tous les calculs ; nous nous contenterons de quelques cas typiques pour montrer leur faisabilité.

4.1 - <u>calcul de $\gamma(H,\iota)$ (resp. $c(H,\iota)$) pour $\iota\in\Delta(\bar{I})$.</u>

$$\gamma[(H,\iota)/\iota\in\Delta(\bar{I})]=\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\in H(E)\cap(E_{i_1}\times E_{i_1})\times(E_{i_3}\times E_{i_3})], \quad (24)$$

$$\text{où } ((i_1,i_1),(i_3,i_3))\in\Delta(\bar{I}).$$

Cette espérance représente la proportion de couples de préordres totaux $(\theta'_{i_1},\theta'_{i_3})$ tels que θ'_{i_1} place la première composante x de u avant la deuxième composante y de u et θ'_{i_3} place la première composante z de v avant la deuxième composante t de v. Cette proportion est égale à

$$\sum\left\{\frac{n(i_1\wedge k)\,n(i_1\wedge k')}{n(i_1)[n(i_1)-1]}\times\frac{n(i_3\wedge k'')\,n(i_3\wedge k''')}{n(i_3)[n(i_3)-1]}\Big/ 1\leq k<k'\leq K, 1\leq k''<k'''\leq K\right\}$$

(25)

D'autre part,

$$c[(H,\iota)/\iota\in\Delta(\bar{I})]=\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in H(E)\cap(E_{i_1}\times E_{i_1})\times(E_{i_3}\times E_{i_3})\},\quad(26)$$

où $((i_1,i_1),(i_3,i_3))$ appartient à $\Delta(\bar{I})$, représente le nombre de couples de couples de la forme $((x,y),(z,t))$ tels que d'une part, (x,y) appartient à la restriction $R(\eta_{i_1})$ de $R(\eta)$ à $E_{i_1}\times E_{i_1}$ et d'autre part, (z,t) appartient à la restriction $R(\eta_{i_3})$ de $R(\eta)$ à $E_{i_3}\times E_{i_3}$. Dans ces conditions, ce cardinal s'écrit :

$$\sum\{n(i_1\wedge j)\,n(i_1\wedge j')\,n(i_3\wedge j'')\,n(i_3\wedge j''')/1\leq j<j'\leq J, 1\leq j''<j'''\leq J\}.\quad(27)$$

4.2- calcul de $\gamma(G_1,\iota)$ (resp. $c(G_1,\iota)$) pour $\iota\in G_1(\bar{I})$.

$$\gamma[(G_1,\iota)/\iota\in G_1(\bar{I})]=\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v)\in G_1(E)\cap(E_{i_1}\times E_{i_2})\times(E_{i_1}\times E_{i_4})].\quad(28)$$

où $((i_1,i_2),(i_1,i_4))$ appartient à $G_1(\bar{I})$. Il s'agit de la proportion de tri-uples de préordres totaux $(\theta'_{i_1},\theta'_{i_2},\theta'_{i_4})$ qui, respectivement, placent l'objet x (première composante commune de u et de v) dans une classe d'indice k, l'objet y (deuxième composante de u) dans une classe d'indice k' et l'objet t (deuxième composante de v) dans une classe d'indice k'' ; tels que $k<k'$ et $k<k''$. Cette proportion est donc égale à

$$\sum\left\{\frac{n(i_1\wedge k)}{n(i_1)}\times\frac{n(i_2\wedge k')}{n(i_2)}\times\frac{n(i_4\wedge k'')}{n(i_4)}\Big/1\leq k<k', k<k''\leq K\right\}.\quad(29)$$

D'autre part,

$$c[(G_1,\iota)/\iota\in G_1(\bar{I})]=\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in G_1(E)\cap(E_{i_1}\times E_{i_2})\times(E_{i_1}\times E_{i_4})\},\quad(30)$$

où $((i_1,i_2),(i_1,i_4))$ appartient à $G_1(\bar{I})$, représente le nombre de couples de couples de la forme $((x,y),(x,t))$ pour lesquels x appartient à une classe d'indice j de η_{i_1}, y à une classe d'indice j' $(j'>j)$ de η_{i_2}, t à une classe d'indice j'' $(j''>j)$ de η_{i_4} ; où η_{i_ℓ} est la restriction de η à E_{i_ℓ}. Par conséquent, ce cardinal est égal à

$$\sum\{n(i_1 \wedge j)\, n(i_2 \wedge j')\, n(i_4 \wedge j'') \,/\, 1 \leqslant j < j',\ j < j'' \leqslant J\}. \quad (31)$$

4.3 - calcul de $\gamma(H,\iota)$ (resp. $c(H,\iota)$) pour $\iota \in G_1(\bar{I})$.

$$\gamma[(H,\iota)/\iota \in G_1(\bar{I})] = \mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \in H(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_2}) \times (E_{i_1} \times E_{i_4})], \quad (32)$$

où $((i_1,i_2),(i_1,i_4))$ appartient à $G_1(\bar{I})$. Cette espérance est définie par la proportion de tri-uples de préordres totaux $(\theta'_{i_1},\theta'_{i_2},\theta'_{i_4})$ tels que θ'_{i_1} place l'objet x dans sa k-ème classe et l'objet z dans sa h-ème classe, θ'_{i_2} place l'objet y dans sa k'-ème classe avec $k' > k$ et θ'_{i_4} place l'objet t dans sa h'-ème classe avec $h' > h$.

Cette proportion se décompose en une somme de deux proportions selon que $h = k$ où $h \neq k$; elle est égale à

$$\sum\left\{\frac{n(i_1 \wedge k)[n(i_1 \wedge k)-1]}{n(i_1)[n(i_1)-1]} \times \frac{n(i_2 \wedge k')}{n(i_2)} \times \frac{n(i_4 \wedge k'')}{n(i_4)} \Big/ \begin{matrix} 1 \leqslant k < k', \\ k < k'' \leqslant K \end{matrix}\right\}$$

$$+ \sum\left\{\frac{n(i_1 \wedge k)\, n(i_1 \wedge h)}{n(i_1)[n(i_1)-1]} \times \frac{n(i_2 \wedge k')\, n(i_4 \wedge h)}{n(i_2)\, n(i_4)} \Big/ \begin{matrix} 1 \leqslant k < k' \leqslant K, \\ 1 \leqslant h < h' \leqslant K, h \neq k \end{matrix}\right\}$$

$$(33)$$

D'autre part,

$$\sum\{\varphi((x,y),(z,t)) / ((x,y),(z,t)) \in H(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_2}) \times (E_{i_1} \times E_{i_4})\} \quad (34)$$

représente le nombre d'éléments $((x,y),(z,t))$ de $H(E)$ tels que

$$(x,y) \in R(\eta) \cap E_{i_1} \times E_{i_2} \quad \text{et} \quad (z,t) \in R(\eta) \cap E_{i_1} \times E_{i_4}.$$

Pour tout système de trois indices j, j' et j'' tels que $1 \leqslant j < j'$, $j < j'' \leqslant J$, il y a $n(i_1 \wedge j)\, n(i_2 \wedge j')\, [n(i_1 \wedge j) - 1]\, n(i_4 \wedge j'')$ éléments contribuant à la somme (34) pour lesquels x et z appartiennent à $F_{j i_1}$, y appartient à $F_{j' i_2}$ et t à $F_{j'' i_4}$.

Pour tout système de quatre indices j, j', h et h' tels que $1 \leqslant j < j' \leqslant J$, $1 \leqslant h < h' \leqslant J$ et $j \neq h$, il y a $n(i_1 \wedge j)\, n(i_2 \wedge j')\, n(i_1 \wedge h)\, n(i_4 \wedge h')$ éléments qui contribuent à la somme (34) pour lesquels x appartient à $F_{j i_1}$, y à $F_{j' i_2}$, z à $F_{h i_1}$ et t à $F_{h' i_4}$.

Le cardinal $c[(H,\iota)/\iota \vdash G_1(\bar{I})]$ est par conséquent égal à

$$\sum\{n(i_1 \wedge j)[n(i_1 \wedge j)-1]\, n(i_2 \wedge j')\, n(i_4 \wedge j'')/1 \leqslant j < j',\, j < j'' \leqslant J\}$$
$$+\sum\{n(i_1 \wedge j)\, n(i_2 \wedge j')\, n(i_1 \wedge h)\, n(i_4 \wedge h')/1 \leqslant j < j' \leqslant J,\, 1 \leqslant h < h' \leqslant J,\, j \neq h\}. \quad (35)$$

Nous allons encore envisager une dernière situation.

4.4- <u>calcul de $\gamma(G_1', \iota)$ (resp. $c(G_1', \iota)$) pour $\iota \vdash K_3(\bar{I})$.</u>

$$\gamma[(G_1', \iota)/\iota \vdash K_3(\bar{I})] = \mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \vdash G_1'(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_1}) \times (E_{i_3} \times E_{i_1})],$$

où $((i_1, i_1), (i_3, i_1)) \vdash K_3(\bar{I})$. (36)

Cette espérance est définie par la proportion de couples de préordres totaux $(\theta'_{i_1}, \theta'_{i_3})$ tels que θ'_{i_1} situe l'objet x (première composante de u et deuxième composante de v) dans sa k-ème classe et l'objet y (deuxième composante de u) dans sa k'-ème classe, avec $k < k'$ et d'autre part, θ'_{i_3} situe l'objet z (première composante de v) dans sa k''-ème classe, avec $k'' < k$. Cette proportion est donc égale à

$$\sum\left\{\frac{n(i_1 \wedge k)\, n(i_1 \wedge k')}{n(i_1)\,[n(i_1)-1]} \times \frac{n(i_3 \wedge k'')}{n(i_3)} \Big/ 1 \leqslant k'' < k < k' \leqslant K\right\}. \quad (37)$$

Par ailleurs,

$$c(G_1', \iota) = \sum\{\varphi((x,y),(z,x)) / ((x,y),(z,x)) \vdash (E_{i_1} \times E_{i_1}) \times (E_{i_3} \times E_{i_1})\} \quad (38)$$

est un cardinal qui peut être énuméré par rapport à l'indice j de la classe $F_{j i_1}$ de l'objet x. On obtient

$$\sum\{n(i_1 \wedge j)\, n(i_1 \wedge j')\, n(i_3 \wedge j'')/ 1 \leqslant j'' < j < j' \leqslant J\}. \quad (39)$$

Nous n'irons pas plus loin dans le détail des calculs qui permettent la détermination des différents élém ments de l'expression (23), en attendant leur programmation, délicate certes, mais tout à fait possible.

Considérons à présent la v.a. duale $S(\eta',\theta;\zeta)$ dont on comprend aisément la définition (cf. § 1 ci-dessus). On remarquera que pour des raisons de symétrie formelle, les deux premiers moments de la distribution de la v.a. $S(\eta',\theta;\zeta)$ sont respectivement identiques à ceux de la v.a. $S(\eta,\theta';\zeta)$. Cette propriété doit, pour des raisons liées à la structure du calcul, être étendue à n'importe quel moment. Comme nous l'avons fait dans le cas total [LERMAN (1973)], ce calcul suppose l'examen de la structure propre d'un q-uple de couples d'objets distincts de E (resp. d'un q-uple de couples d'indices de $\bar{I}$) (q entier). Nous n'irons pas plus loin dans cette analyse en nous permettant toutefois d'avancer la propriété suivante :

THEOREME 2 - La distribution de la v.a. $S(\eta',\theta;\zeta)$ est identique à celle de la v.a. $S(\eta,\theta';\zeta)$.

Par rapport aux expressions calculées l'indice d'association partielle se met sous la forme

$$\rho_{\eta\theta\cdot\zeta} = \frac{s(\eta,\theta) - \mu_1(\eta,\theta';\zeta)}{\sqrt{\mu_2(\eta,\theta';\zeta) - \mu_1^2(\eta,\theta';\zeta)}} \qquad (40)$$

(cf. formules (4), (16) et (23)).

5 - INDEPENDANCE CONDITIONNELLE.

L'indépendance conditionnelle entre les deux variables totalement préordinales η et θ, relativement à la variable de même nature ζ, s'exprime comme suit :

- Pour tout i, $1 \leq i \leq I$ et tout ensemble de quatre indices j, j', k et k' tels que $1 \leq j < j' \leq J$ et $1 \leq k < k' \leq K$, la proportion relative de couples (x,y) appartenant à $(F_j \cap G_k \cap E_i) \times (F_{j'} \cap G_{k'} \cap E_i)$ est égale à la proportion relative de couples (x,y) appartenant à $(F_j \cap E_i) \times (F_{j'} \cap E_i)$, multipliée par la proportion relative de couples (x,y) appartenant à $(G_k \cap E_i) \times (G_{k'} \cap E_i)$; ces différentes proportions conditionnelles étant relatives à l'ensemble des couples d'éléments distincts de $E_i \times E_i$:

$$(\forall i, 1 \leq i \leq I) \text{ et } (\forall (j,j',k,k'), 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K),$$
$$\frac{n(i \wedge j \wedge k)\, n(i \wedge j' \wedge k')}{n(i)[n(i)-1]} = \frac{n(i \wedge j)\, n(i \wedge j')}{n(i)[n(i)-1]} \times \frac{n(i \wedge k)\, n(i \wedge k')}{n(i)[n(i)-1]} \quad (41)$$

– Pour tout (i,i') de $\bar{I}^{[2]}$ et tout ensemble de quatre indices j, j', k et k' tels que $1 \leq j < j' \leq J$ et $1 \leq k < k' \leq K$, la proportion relative de couples (x,y) appartenant à $(F_j \cap G_k \cap E_i) \times (F_{j'} \cap G_{k'} \cap E_{i'})$ est égale au produit de la proportion relative de couples (x,y) appartenant à $(F_j \cap E_i) \times (F_{j'} \cap E_{i'})$ par la proportion relative de couples (x,y) appartenant à $(G_k \cap E_i) \times (G_{k'} \cap E_{i'})$; ces différentes proportions conditionnelles étant relatives à l'ensemble $E_i \times E_{i'}$:

$$(\forall (i,i') \in \bar{I}^{[2]}) \text{ et } (\forall (j,j',k,k'), 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K),$$
$$\frac{n(i \wedge j \wedge k)\, n(i' \wedge j' \wedge k')}{n(i)\, n(i')} = \frac{n(i \wedge j)\, n(i' \wedge j')}{n(i)\, n(i')} \times \frac{n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k')}{n(i)\, n(i')} . \quad (42)$$

<u>PROPRIETE</u> – Le coefficient d'association partielle $\rho_{\eta\theta \cdot \xi}$ est nul en cas d'indépendance conditionnelle caractérisée par les relations (41) et (42) ci-dessus.

Pour le voir il suffit de décomposer $R(\eta) \cap R(\theta)$ conformément à la partition suivante de $E^{[2]}$:

$$E^{[2]} = \sqsubset \{ E_i^{[2]} / i \in \bar{I} \} + \sqsubset \{ E_i \times E_{i'} / (i,i') \in \bar{I}^{[2]} \} , \quad (43)$$

où la somme est ensembliste.

V.2-cas d'un indice d'association partielle dans le cadre d'une h.a.l. à caractère global.

Les notations restent les mêmes que celles du paragraphe V.1 précédent, l'indice cherché ici sera noté $r_{\eta\theta \cdot \xi}$.

L'indice brut entre les deux variables qualitatives ordinales

η et θ, $s(\eta,\theta)$ reste toujours défini par la relation (4) du paragraphe précédent.

1 – EXPRESSION DE L'H.A.L.

Les calculs de ce paragraphe se distingueront de ceux du paragraphe V.1 précédent de la même manière que les calculs du paragraphe IV.3 se sont distingués de ceux du paragraphe IV.2. A l'indice brut $s(\eta,\theta)$ on associe la v.a. $S_1(\eta,\theta';\xi)$ (resp. $S_1(\eta',\theta;\xi)$) qui sera en fait définie à partir de l'expression de ses moments calculés d'une façon particulière dans le cadre de la même h.a.l. que ci-dessus (§ V.1). Cette façon particulière, nous l'avons déjà vu dans le cas de la comparaison de partitions, consiste à effectuer les calculs de proportions conditionnées de façon globale "en moyenne". Relativement au préordre total ξ, on ne retiendra de la connaissance de la position d'un couple d'objets distincts (x,y) de $E\times E$ que son appartenance à $R(\xi)$ ou à $S(\xi)$ (partie complémentaire de $R(\xi)$ dans $E^{[2]}$), en «oubliant» la position relative des deux composantes x et y par rapport aux diverses classes E_i, $1\leq i\leq I$, du préordre tot ξ. D'autre part, pour ce qui concerne un couple de couples $((x,y),(x',y'))$, on tiendra d'une part compte de sa structure propre selon son appartenance à $G_1(E)$, $G_1'(E)$, $G_2(E)$, $G_2'(E)$ ou $H(E)$ et d'autre part, relativement à ξ, selon son appartenance à $R(\xi)\times R(\xi)$, à $R(\xi)\times S(\xi)$ ou à $S(\xi)\times S(\xi)$.

Nous avons déjà donné les arguments qui justifient cette approche dans le cas de la comparaison de partitions (cf. § IV.3.1. ci-dessus) ; ils se trouveront confirmés dans le cas de la comparaison de variables "rang".

2 – CALCUL DE LA MOYENNE DE LA V.A. $S_1(\eta,\theta;\xi)$.

φ (resp. ψ') désigne toujours la fonction indicatrice de $R(\eta)$ (resp. $R(\theta')$). La v.a. $S_1(\eta,\theta';\xi)$ s'exprime par la formule suivante :

$$S_1(\eta,\theta';\varsigma)=\sum\{\varphi(u)\psi'(u)/u\in R(\varsigma)\}$$
$$+\sum\{\varphi(u)\psi'(u)/u\in S(\varsigma)\},\qquad(1)$$

où, rappelons le,

$$\left.\begin{aligned}R(\varsigma)&=\sum\{E_i\times E_{i'}/1\leq i<i'\leq I\},\\ S(\varsigma)&=\sum\{E_i\times E_{i'}/1\leq i'<i\leq I\}\\ &\qquad+\sum\{(E_i)^{[2]}/1\leq i\leq I\}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Le calcul de $\mathcal{E}[S_1(\eta,\theta';\varsigma)]$ suppose la détermination des valeurs des deux expressions suivantes :

$$Pr\{\psi'(u)=1/u\in R(\varsigma)\}\qquad(3)$$

et $$Pr\{\psi'(u)=1/u\in S(\varsigma)\}.\qquad(4)$$

Nous désignerons par $r[(n;t);\varsigma]$ le cardinal de l'ensemble des préordres totaux θ_1 de composition $t=(n(1),n(2),\ldots,n(k),\ldots,n(K))$ pour lesquels la table de contingence de l'intersection des deux préordres se trouve définie par $\{n(i\wedge k)/1\leq i\leq I,\ 1\leq k\leq K\}$. Bien qu'il puisse être aisément déterminé, nous n'aurons pas besoin d'expliciter ce cardinal dans les raisonnements par symétrie que nous allons conduire.

Nous noterons $r[u/u\in R(\varsigma)]$ (resp. $r[u/u\in S(\varsigma)]$) le nombre moyen de fois où la première composante x de u précède strictement (pour θ_1) la deuxième composante y de u, lorsque θ_1 décrit son espace d'évolution qu'on indiquera par $\Omega((n;t);\varsigma)$ (card $[\Omega((n;t);\varsigma)=r[(n;t);\varsigma]]$).

Dans ces conditions, les expressions (3) et (4) ci-dessus peuvent se mettre sous la forme

$$Pr\{\psi'(u)=1/u\in R(\varsigma)\}=\frac{r[u/u\in R(\varsigma)]}{r[(n;t);\varsigma]},\qquad(5)$$

$$Pr\{\Psi'(u)=1/u\vdash S(\varrho)\}=\frac{r[u/u\vdash S(\varrho)]}{r[(n;t);\varrho]} \tag{6}$$

Nous dirons qu'un couple (x,y) se trouve "spécifié" par θ_1 si (x,y) appartient à $R(\theta_1)$. Pour déterminer le rapport (5) (resp. (6)), on calcule de deux façons différentes le nombre de spécifications qui s'opèrent de couples de $R(\varrho)$ (resp. $S(\varrho)$), lorsque θ_1 décrit son espace d'évolution $\Omega((n;t);\varrho)$. On a

$$r[u/u\vdash R(\varrho)]\,\mathrm{card}[R(\varrho)]=\mathrm{card}[R(\varrho)\cap R(\theta)]\,r[(n;t);\varrho] \tag{7}$$

et

$$r[u/u\vdash S(\varrho)]\,\mathrm{card}[S(\varrho)]=\mathrm{card}[S(\varrho)\cap R(\theta)]\,r[(n;t);\varrho]. \tag{8}$$

Ainsi

$$Pr\{\Psi'(u)=1/u\vdash R(\varrho)\}=\frac{\mathrm{card}[R(\varrho)\cap R(\theta)]}{\mathrm{card}[R(\varrho)]} \tag{9}$$

et

$$Pr\{\Psi'(u)=1/u\vdash S(\varrho)\}=\frac{\mathrm{card}[S(\varrho)\cap R(\theta)]}{\mathrm{card}[S(\varrho)]}. \tag{10}$$

Dans ces conditions, on obtient

$$\mathcal{E}[S_1(\eta,\theta';\varrho)]=\frac{\mathrm{card}[R(\varrho)\cap R(\eta)]\,\mathrm{card}[R(\varrho)\cap R(\theta)]}{\mathrm{card}[R(\varrho)]}+\frac{\mathrm{card}[S(\varrho)\cap R(\eta)]\,\mathrm{card}[S(\varrho)\cap R(\theta)]}{\mathrm{card}[S(\varrho)]}. \tag{11}$$

On connaît déjà l'expression de $\mathrm{card}[R(\varrho)\cap R(\eta)]$ en fonction des cardinaux des classes de l'intersection des deux préordres totaux ϱ et θ (cf. formule (4) du paragraphe précédent). Par ailleurs, une expression de la forme $\mathrm{card}[S(\varrho)\cap R(\eta)]$ se met sous la forme

$$\mathrm{card}[S(\varrho)\cap R(\eta)]=\sum\{n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j')/1\leq j'<j\leq J,\ 1\leq i<i'\leq I\}. \tag{12}$$

3_ CALCUL DE LA VARIANCE DE LA V.A. $S_1(\eta,\theta';\varrho)$.

Le moment absolu d'ordre 2 de $S_1(\eta,\theta';\varrho)$ se met sous la forme suivante :

$$\mu_1(\eta,\theta';\varsigma) + \sum\{\varphi(u)\varphi(v)\,\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)]/(u,v)\leftarrow(R(\varsigma))^{[2]}\}$$
$$+\sum\{\varphi(u)\varphi(v)\,\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)]/(u,v)\leftarrow(S(\varsigma))^{[2]}\}$$
$$+2\sum\{\varphi(u)\varphi(v)\,\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\leftarrow R(\varsigma)\times S(\varsigma)\}, \quad (13)$$

où $\mu_1(\eta,\theta';\varsigma)$ n'est autre que $\mathcal{E}[S_1(\eta,\theta';\varsigma)]$ (cf. (11)).

Chacune des sommes aura à être décomposée selon la structure propre du couple (u,v) ; c'est à dire, conformément à la partition $\{G_1, G'_1, G_2, G'_2, H\}$ de $(E^{[2]})^{[2]}$ (cf. § V.1-4). Nous aurons dans ces conditions à évaluer les expressions de la forme :

$$\left.\begin{array}{l}
\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\leftarrow K\cap(R(\varsigma))^{[2]}] \\
\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\leftarrow K\cap(R(\varsigma))^{[2]}\} \\
\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\leftarrow K\cap(S(\varsigma))^{[2]}] \\
\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\leftarrow K\cap(S(\varsigma))^{[2]}\} \\
\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\leftarrow K\cap(R(\varsigma)\times S(\varsigma))] \\
\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\leftarrow K\cap(R(\varsigma)\times S(\varsigma))\},
\end{array}\right\} (14)$$

où K désigne ici l'un des ensembles G_1, G'_1, G_2, G'_2 et H.

Les expressions précédentes seront respectivement notées $\Gamma(K,R2)$, $C(K,R2)$, $\Gamma(K,S2)$, $C(K,S2)$, $\Gamma(K,RS)$ et $C(K,RS)$.

Nous nous contenterons d'expliciter le calcul des expressions les plus typiques pour préciser la nature des calculs, en laissant le soin au lecteur d'achever sans difficulté la détermination des dernières expressions.

3.1 _ calcul de $\Gamma(G_1, R2)$.

Nous dirons qu'un couple (u,v) de $(E^{[2]})^{[2]}$ se trouve "spécifié" par le préordre total θ_1 si (u,v) appartient à $(R(\theta_1))^{[2]}$. Nous allons dans ces conditions, pour déterminer $\Gamma(G_1, R2)$ calculer de deux façons différentes le nombre total de spécifications qui s'opèrent au niveau de l'ensemble $G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}$ lorsque θ_1 décrit son espace $\Omega[(n;t);\xi]$ d'évolution. Pour cela, on introduit le nombre moyen de fois où (u,v) de $G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}$ se trouve spécifié lorsque θ_1 décrit son espace d'évolution; ce dernier est noté

$$r\,[(u,v)\,/\,(u,v) \in G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}]. \quad (15)$$

On a

$$r[(u,v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}] \times \mathrm{card}[G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}]$$
$$= r[(n;t);\xi] \times \mathrm{card}[G_1 \cap (R(\xi))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}], \quad (16)$$

puisque chaque θ_1 spécifie exactement $\mathrm{card}[G_1 \cap (R(\xi))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}]$ couples (u,v) de $G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}$.

Pour achever de déterminer l'expression cherchée qui est représentée par la proportion

$$r[(u;v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}]/r[(n;t);\xi],$$

il nous faut achever de préciser $\mathrm{card}[G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}]$ et $\mathrm{card}[G_1 \cap (R(\xi))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}]$. On a

$$\mathrm{card}[G_1 \cap (R(\xi))^{[2]}] = \sum \{n(i)n(i')[n(i')-1]/1 \leq i < i' \leq I\}$$
$$+ \sum \{n(i)n(i')n(i'')/1 \leq i < i', i < i'' \leq I, \; i' \neq i''\}; \quad (17)$$

d'autre part, le deuxième cardinal à déterminer peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{card}[G_1 \cap [(R(\xi)\cap R(\theta_1)) \times (R(\xi)\cap R(\theta_1))]]$$
$$= \sum \{n(i\wedge k)\, n(i'\wedge k')[n(i'\wedge k')-1] / 1\leq i<i'\leq I, 1\leq k<k'\leq K\}$$
$$+ \sum \{n(i\wedge k)\, n(i'\wedge k')\, n(i''\wedge k'') / 1\leq i<i', i<i''\leq I, 1\leq k<k', k<k''\leq K,$$
$$(i'',k'')\neq(i',k')\} \;. \quad (18)$$

Dans ces conditions $\Gamma(G_1, R2)$ représente le rapport de l'expression (18) sur celle, (17).

3.1'_ calcul de $G(G_1, R2)$.

Il s'agit de $\mathrm{card}[G_1 \cap (R(\xi))^{[2]} \cap (R(\eta))^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (18).

3.2_ calcul de $\Gamma(G_1, S2)$.

Le principe de ce calcul est analogue à celui du paragraphe 3.1. ci-dessus ; nous avons à déterminer $\mathrm{card}[G_1 \cap (S(\xi))^{[2]}]$ et $\mathrm{card}[G_1 \cap (S(\xi))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}]$.

$$\mathrm{card}[G_1 \cap (S(\xi))^{[2]}] = \sum \{n(i)\, m(i')\, m(i'') / 1\leq i'\leq i, i''\leq i\leq I\}, \quad (19)$$

où il y a lieu de préciser $m(i')$ et $m(i'')$ selon la position relative des trois indices i, i' et i''. On a les situations suivantes et les valeurs associées de $m(i')$ et de $m(i'')$:

$i = i' = i'' \longrightarrow m(i') = [n(i)-1]$ et $m(i'') = [n(i)-2]$
$i = i' > i'' \longrightarrow m(i') = [n(i)-1]$ et $m(i'') = n(i'')$
$i = i'' > i' \longrightarrow m(i') = n(i')$ et $m(i'') = [n(i)-1]$
$i > i' = i'' \longrightarrow m(i') = n(i')$ et $m(i'') = [n(i')-1]$
$i > i', i > i''$ et $i' \neq i'' \longrightarrow m(i') = n(i')$ et $m(i'') = n(i'')$,

où, relativement à $(u,v) = ((x,y),(x,z))$, i désigne le numéro de la classe de l'objet x, i' celui de la classe de l'objet y et i'' celui de la classe de l'objet z.

D'autre part,

$$\mathrm{card}[\mathcal{G}_1 \cap (S(\xi))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}] = \sum \{n(i\wedge k)\, n(i'\wedge k')[n(i'\wedge k') - 1] / 1 \leqslant i' \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k < k' \leqslant K\}$$
$$+ \sum \{n(i\wedge k)\, n(i'\wedge k')\, n(i''\wedge k'') / 1 \leqslant i' \leqslant i,\ i'' \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k < k',\ k < k'' \leqslant K,\ k' \neq k''\}; \quad (20)$$

la première somme s'obtenant dans le cas où, relativement à un élément courant $((x,y),(x,z))$ de $\mathcal{G}_1$, la classe de y est la même que celle de z pour l'intersection des deux préordres totaux ξ et θ.

La proportion cherchée définie par $\Gamma(\mathcal{G}_1, S2)$ est représentée par le rapport de l'expression (20) sur celle, (19).

3.2'_ calcul de $C(\mathcal{G}_1, S2)$

Il s'agit du cardinal $\mathrm{card}[\mathcal{G}_1 \cap (S(\xi))^{[2]} \cap R(\eta)^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (20) ci-dessus.

3.3 _ calcul de $\Gamma(\mathcal{G}_1, RS)$.

Conformément à la même démarche, nous avons à déterminer

$\mathrm{card}[\mathcal{G}_1 \cap (R(\xi) \times S(\xi))]$ et $\mathrm{card}[\mathcal{G}_1 \cap (R(\xi) \times S(\xi)) \cap R(\theta)^{[2]}]$

On a

$$\mathrm{card}[\mathcal{G}_1 \cap (R(\xi) \times S(\xi))] = \sum \{n(i)\, m(i')\, m(i'') / 1 \leqslant i'' \leqslant i < i' \leqslant I\}$$

où $m(i'') = n(i'')$ (resp. $[n(i) - 1]$) si $i'' \neq i$ (resp. $= i$). (21)

D'autre part,

$$\mathrm{card}[\mathcal{G}_1 \cap [(R(\xi) \cap R(\theta)) \times (S(\xi) \cap R(\theta))]]$$
$$= \sum \left\{n(i\wedge k)\, n(i'\wedge k')\, n(i''\wedge k'') \middle/ \begin{array}{l} 1 \leqslant i'' \leqslant i < i' \leqslant I, \\ 1 \leqslant k < k',\ k < k'' \leqslant K \end{array}\right\},$$

(22)

en précisant que, relativement à un élément courant $((x,y),(x,z))$ de G_1, i, i' et i'' (resp. k, k' et k'') désignent respectivement les numéros des classes de ℓ (resp. θ) auxquelles appartiennent les objets x, y et z.

La proportion cherchée que définit $\Gamma(G_1, RS)$ est le rapport de l'expression (22) sur celle (21).

3.3'_ calcul de $C(G_1, RS)$.

Il s'agit de $\text{card}\,[G_1 \cap (R(\ell) \times S(\ell)) \cap R(\eta)^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (22) ci-dessus.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, nous laissons le soin au lecteur d'effectuer les calculs de $\Gamma(K,R2)$, $\Gamma(K,S2)$ et $\Gamma(K,RS)$ (resp. $C(K,R2)$, $C(K,S2)$ et $C(K,RS)$) pour $K = G_1'$, G_2 et G_2' ; mais, nous allons nous occuper du calcul pour $K=H$.

3.4_ calcul de $\Gamma(H,R2)$.

Nous avons à déterminer

$\text{card}\,[H \cap (R(\ell)^{[2]})]$ et $\text{card}\,[H \cap R(\ell)^{[2]} \cap R(\theta)^{[2]}]$

$$\text{card}\,[H \cap R(\ell)^{[2]}] = \sum \left\{ n(i)\,n(i')\,m(i'')\,m(i''') \Big/ \begin{array}{l} 1 \leqslant i < i', \\ i'' < i''' \leqslant I \end{array} \right\} \quad (23)$$

où

$m(i'') = n(i'') - 1$ si $i'' = i$ ou $i'' = i'$,

$m(i''') = n(i''') - 1$ si $i''' = i$ ou $i''' = i'$.

D'autre part,

$$\text{card}\,[H \cap [(R(\ell) \cap R(\theta)) \times (R(\ell) \cap R(\theta))]]$$

$$= \sum \left\{ n(i \wedge k)\,n(i' \wedge k')\,m(i'' \wedge k'')\,m(i''' \wedge k''') \Big/ \begin{array}{l} 1 \leqslant i < i',\ i'' < i''' \leqslant I, \\ 1 \leqslant k < k',\ k'' < k''' \leqslant K \end{array} \right\} \quad (24)$$

où

$m(i'' \wedge k'') = [n(i'' \wedge k'') - 1]$ si $(i'', k'') = (i,k)$ ou $= (i',k')$,

$m(i''' \wedge k''') = [n(i''' \wedge k''') - 1]$ si $(i''', k''') = (i,k)$ ou $= (i',k')$.

Dans les formules (23) et (24), relativement à un élément courant $((x,y),(z,t))$ de H, i, i', i'' et i''' (resp. k, k', k'' et k''') désignent respectivement les numéros des classes de ξ (resp. θ) auxquelles appartiennent les objets x, y, z et t.

La proportion que définit $\Gamma(H,R2)$ est le rapport de l'expression (24) sur celle (23).

3.4'- calcul de $C(H,R2)$.

Il s'agit de $\mathrm{card}[H \cap R(\xi)^{[2]} \cap R(\eta)^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (24) ci-dessus.

3.5- calcul de $\Gamma(H,S2)$.

Il y a lieu de déterminer

$\mathrm{card}[H \cap (S(\xi)^{[2]})]$ et $\mathrm{card}[H \cap (S(\xi)^{[2]} \cap R(\theta)^{[2]}]$.

$$\mathrm{card}[H \cap (S(\xi)^{[2]})] = \sum \{ n(i)\, m(i')\, m(i'')\, m(i''') / 1 \leq i' \leq i,\ i''' \leq i'' \leq I \}. \quad (25)$$

Pour préciser $m(i')$, $m(i'')$ et $m(i''')$, il y a lieu de distinguer les situations suivantes où seuls les indices égaux sont mentionnés :

$i = i' = i'' = i''' \longrightarrow m(i') = [n(i')-1]$, $m(i'') = [n(i'')-2]$ et $m(i''') = [n(i''')-3]$,

$i = i' = i'' \longrightarrow m(i') = [n(i')-1]$, $m(i'') = [n(i'')-2]$ et $m(i''') = n(i''')$,

$i = i' = i''' \longrightarrow m(i') = [n(i')-1]$, $m(i'') = n(i'')$ et $m(i''') = [n(i''')-2]$,

$i = i'' = i''' \longrightarrow m(i') = n(i')$, $m(i'') = [n(i'')-1]$ et $m(i''') = [n(i''')-2]$,

$i' = i'' = i''' \longrightarrow m(i') = n(i')$, $m(i'') = [n(i'')-1]$ et $m(i''') = [n(i''')-2]$,

$i = i' \longrightarrow m(i') = [n(i')-1]$, $m(i'') = n(i'')$ et $m(i''') = n(i''')$,

$i = i'' \longrightarrow m(i') = n(i')$, $m(i'') = [n(i'')-1]$ et $m(i''') = n(i''')$,

$i = i''' \longrightarrow m(i') = n(i')$, $m(i'') = n(i'')$ et $m(i''') = [n(i''')-1]$,

$i'=i'' \to m(i')=n(i'), m(i'')=[n(i'')-1]$ et $m(i''')=n(i''')$,
$i'=i''' \to m(i')=n(i'), m(i'')=n(i'')$ et $m(i''')=[n(i''')-1]$, enfin
$i''=i''' \to m(i')=n(i'), m(i'')=n(i'')$ et $m(i''')=[n(i''')-1]$.

D'autre part,

$$\mathrm{card}[H \cap ([S(\varrho)\cap R(\theta)]\times[S(\varrho)\cap R(\theta)])]$$

$$=\sum\left\{n(i\wedge k)n(i'\wedge k')m(i''\wedge k'')m(i'''\wedge k''')\,/\,\begin{matrix}1\leq i'\leq i,\ i'''\leq i''\leq I,\\ 1\leq k<k',\ k''<k'''\leq K\end{matrix}\right\} \quad (26)$$

où $m(i''\wedge k'')= n(i''\wedge k'')$ (resp. $[n(i''\wedge k'')-1]$ si $(i'',k'')\neq(i,k)$ et $(i'',k'')\neq(i',k')$ (resp. si $(i'',k'')=(i,k)$ ou $(i'',k'')=(i',k')$.)), de même $m(i'''\wedge k''')=n(i'''\wedge k''')$ (resp. $m(i'''\wedge k''')=[n(i'''\wedge k''')-1]$) si $(i''',k''')\neq(i,k)$ et $(i''',k''')\neq(i',k')$ (resp. $(i''',k''')=(i,k)$ ou $(i''',k''')=(i',k')$).

Il est entendu que dans les formules (25) et (26) l'indéxation des classes par rapport à la position des objets x, y, z et t d'un élément courant $((x,y),(z,t))$ de H est la même que celle considérée au paragraphe 3.4 ci-dessus.

La proportion que définit $\Gamma(H,S2)$ est le rapport de l'expression (26) sur celle (25).

3.5'- calcul de $G(H,S2)$.

Il s'agit de $\mathrm{card}[H\cap(S(\varrho)^{[2]}\cap R(\eta)^{[2]})]$ dont l'expression est analogue à celle (26) ci-dessus.

3.6- calcul de $\Gamma(H,RS)$.

Il y a lieu de déterminer

$\mathrm{card}[H\cap(R(\varrho)\times S(\varrho))]$ et $\mathrm{card}[H\cap(R(\varrho)\times S(\varrho))\cap R(\theta)^{[2]}]$.

$$\mathrm{card}[H\cap(R(\varrho)\times S(\varrho))]=\sum\left\{n(i)n(i')m(i'')m(i''')\,/\,\begin{matrix}1\leq i<i'\leq I,\\ 1\leq i'''\leq i''\leq I.\end{matrix}\right\}, \quad (27)$$

où, pour préciser $m(i'')$ et $m(i''')$, il y a lieu de considérer les situations suivantes :

$i = i'' = i''' < i' \longrightarrow m(i'') = [n(i'')-1]$ et $m(i''') = [n(i''')-2]$,
$i < i' = i'' = i''' \longrightarrow m(i'') = [n(i'')-1]$ et $m(i''') = [n(i''')-2]$,
$i = i''' < i' = i'' \longrightarrow m(i'') = [n(i'')-1]$ et $m(i''') = [n(i''')-1]$, enfin
$i < i'$, $i''' < i''$, $i'' \neq i$, $i'' \neq i'$, $i''' \neq i$ et $i''' \neq i' \longrightarrow m(i'') = n(i'')$ et $m(i''') = n(i''')$.

D'autre part,

$$\mathrm{card}[H \cap (R(\varrho) \times R(\theta)) \cap (S(\varrho) \times R(\theta))]$$
$$= \sum \left\{ n(i \wedge k)\, n(i' \wedge k')\, m(i'' \wedge k'')\, m(i''' \wedge k''') \Big/ \begin{matrix} 1 \leq i < i', i''' \leq i'' \leq I, \\ 1 \leq k < k', k'' < k''' \leq K \end{matrix} \right\}, \quad (28)$$

où $m(i'' \wedge k'') = n(i'' \wedge k'')$ (resp. $[n(i'' \wedge k'')-1]$) si $(i'', k'') \neq (i,k)$ et $(i'', k'') \neq (i', k')$ (resp. si $(i'', k'') = (i,k)$ ou $(i'', k'') = (i', k')$), $m(i''' \wedge k''') = n(i''' \wedge k''')$ (resp. $[n(i''' \wedge k''')-1]$) si $(i''', k''') \neq (i,k)$ et $(i''', k''') \neq (i', k')$ (resp. si $(i''', k''') = (i,k)$ ou $(i''', k''') = (i', k')$).

Il est toujours entendu que les formules (27) et (28) ont été établies dans le cadre d'une indéxation des classes de même type que ci-dessus, relativement à la position des objets x, y, z et t d'un élément courant $((x,y),(z,t))$ de H.

La proportion définie par $\Gamma(H, RS)$ est le rapport de l'expression (28) sur celle (27).

3.6'_ <u>calcul de $C(H,RS)$.</u>

Il s'agit de $\mathrm{card}[H \cap (R(\varrho) \times S(\varrho)) \cap R(\eta)^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (28) ci-dessus.

<u>THEOREME 1</u>_ La moyenne $M_1(\eta, \theta'; \varrho)$ de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \varrho)$ est donnée par la formule (11) ci-dessus. La variance $\mathrm{var}_1(\eta, \theta'; \varrho)$ de cette v.a. est donnée par la formule suivante dont les éléments viennent d'être ci-dessus précisés :

$$\begin{aligned}var_1(\eta,\theta';\varrho) = {} & \mu_1(\eta,\theta';\varrho) + \Gamma(G_1,R2)G(G_1,R2)+\Gamma(G'_1,R2)\times \\ & G(G'_1,R2)+\Gamma(G_2,R2)G(G_2,R2)+\Gamma(G'_2,R2)\times \\ & G(G'_2,R2)+\Gamma(H,R2)G(H,R2) \\ & +\Gamma(G_1,S2)G(G_1,S2)+\Gamma(G'_1,S2)G(G'_1,S2)+ \\ & \Gamma(G_2,S2)G(G_2,S2)+\Gamma(G'_2,S2)G(G'_2,S2)+ \\ & \Gamma(H,S2)G(H,S2) \\ & +2[\Gamma(G_1,RS)G(G_1,RS)+\Gamma(G'_1,RS)G(G'_1,RS) \\ & +\Gamma(G_2,RS)G(G_2,RS)+\Gamma(G'_2,RS)G(G'_2,RS) \\ & +\Gamma(H,RS)G(H,RS)] \\ & -\mu_1^2(\eta,\theta';\varrho). \qquad (29)\end{aligned}$$

L'indice d'association partielle $r_{\eta\theta\cdot\varrho}$ est donné par la formule

$$r_{\eta\theta\cdot\varrho}=[s(\eta,\theta)-\mu_1(\eta,\theta;\varrho)]/\sqrt{var_1(\eta,\theta;\varrho)}\ , \qquad (30)$$

où $s(\eta,\theta)$ est l'indice brut déjà défini.

La symétrie des expressions des moments absolus d'ordres 1 et 2 par rapport aux cardinaux des classes de $\varrho\wedge\eta$ d'une part et de $\varrho\wedge\theta$ d'autre part, montre que si les calculs avaient été effectués par rapport à la v.a. $S_1(\eta',\theta;\varrho)$, on aurait obtenu le même résultat.

La définition de la v.a. $S_1(\eta,\theta';\varrho)$ (resp. $S_1(\eta',\theta;\varrho)$) se comprend à partir de l'expression de ses moments calculés de la même manière «globale» que l'ont été les deux premiers moments.

Cette technique de calcul suppose la décomposition de l'ensemble $(E^{[2]})^{[q]}$ des q-uples de couples dont deux quelconques sont distincts, en sous ensembles dont chacun est formé des q-uples de couples de même configuration (cf. [LERMAN (1973)]), on pourra montrer que le moment absolu d'ordre quelconque fixé, calculé «globalement» de la même manière que l'ont été les deux premiers moments, de la v.a. $S_1(\eta',\theta;\varrho)$ est identique à celui de la v.a. $S_1(\eta,\theta';\varrho)$. Dans ces conditions, nous avancerons la propriété suivante :

THEOREME 2 - Dans le cadre de l'h.a.l. à caractère partiel et «global», la distribution de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \varrho)$ est la même que celle de la v.a. $S_1(\eta', \theta; \varrho)$.

4. INDEPENDANCE CONDITIONNELLE.

Nous désignerons dans l'énoncé suivant par E_{jk} la classe (j,k) de l'intersection des deux préordres totaux η et θ. La définition de la notion de l'indépendance conditionnelle dans le cadre de l'h.a.l. considérée ici, est la suivante:

- La proportion relative de couples appartenant à $E_{jk} \times E_{j'k'}$ $(1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K)$ et à $R(\varrho)$ est égale au produit de la proportion relative de couples appartenant à $(F_j \times F_{j'}) \cap R(\varrho)$ par la proportion relative de couples appartenant à $(G_k \times G_{k'}) \cap R(\varrho)$; ces proportions étant relatives à l'ensemble $R(\varrho)$.

- La proportion relative de couples appartenant à $(E_{jk} \times E_{j'k'}) \cap S(\varrho)$ $(1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K)$ est égale au produit de la proportion relative de couples appartenant à $(F_j \times F_{j'}) \cap S(\varrho)$ par la proportion relative de couples appartenant à $(G_k \times G_{k'}) \cap S(\varrho)$; ces proportions étant relatives à l'ensemble $S(\varrho)$.

La première assertion s'exprime par les relations :

$$(\forall (j,j',k,k');\ 1 \leq j < j' \leq J,\ 1 \leq k < k' \leq K),$$

$$\sum\{n(i \wedge j \wedge k)\,n(i' \wedge j' \wedge k') / 1 \leq i < i' \leq I\} / \sum\{n(i)\,n(i') / 1 \leq i < i' \leq I\}$$
$$= \left(\sum\{n(i \wedge j)\,n(i' \wedge j') / 1 \leq i < i' \leq I\} / \sum\{n(i)\,n(i') / 1 \leq i < i' \leq I\}\right)$$
$$\times \left(\sum\{n(i \wedge k)\,n(i' \wedge k') / 1 \leq i < i' \leq I\} / \sum\{n(i)\,n(i') / 1 \leq i < i' \leq I\}\right) \quad (31)$$

La deuxième assertion s'exprime par les relations :

$$(\forall (j,j',k,k')\ ;\ 1\leq j<j'\leq J,\ 1\leq k<k'\leq K),$$

$$\sum\{n(i\wedge j\wedge k)\,n(i'\wedge j'\wedge k')/1\leq i'\leq i\leq I\}/\mathrm{card}(S(\varrho))$$

$$=\left(\sum\{n(i\wedge j)\,n(i'\wedge j')/1\leq i'\leq i\leq I\}/\mathrm{card}(S(\varrho))\right)$$

$$\times\left(\sum\{n(i\wedge k)\,n(i'\wedge k')/1\leq i'\leq i\leq I\}/\mathrm{card}(S(\varrho))\right),\qquad (32)$$

où, rappelons le,

$$\mathrm{card}(S(\varrho))=\sum\{n(i)\,n(i')/1\leq i'<i\leq I\}$$

$$+\sum\{n(i)[n(i)-1]/1\leq i\leq I\}.\qquad (33)$$

PROPRIETE. L'indice d'association partielle $r_{\eta\theta\cdot\varrho}$ est nul dans le cas de l'indépendance conditionnelle caractérisée par les relations (31) et (32).

Pour j, j', k et k' fixés $(1\leq j<j'\leq J,\ 1\leq k<k'\leq K)$, on décompose $E_{jk}\times E_{j'k'}$ conformément à la partition de $E^{[2]}$ en $R(\varrho)$ et en $S(\varrho)$. On obtient pour les cardinaux

$$n(j\wedge k)\,n(j'\wedge k')=\sum\{n(i\wedge j\wedge k)\,n(i'\wedge j'\wedge k')/1\leq i<i'\leq I\}$$

$$+\sum\{n(i\wedge j\wedge k)\,n(i'\wedge j'\wedge k')/1\leq i'<i\leq I\}.\qquad (34)$$

En décomposant la première somme (resp. la seconde) de (34) conformément à la formule (31) (resp. (32)) et en sommant par rapport à j, j', k et k' $(1\leq j<j'\leq J,\ 1\leq k<k'\leq K)$, on obtient le résultat.

VI_ COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX VARIABLES "RANG" PARTIELLE RELATIVEMENT A UNE TROISIEME VARIABLE "RANG".

1_ INDICE BRUT ET H.A.L.

Soient σ, ω et ϖ trois ordres totaux respectivement définis sur l'ensemble E des sujets à partir de trois variables "rang". Il s'agit de définir un coefficient d'association partielle entre les deux dernières variables, neutralisant l'effet de la première variable qui définit σ. Nous noterons cet indice $r_{\omega\varpi.\sigma}$.

Comme dans le cas total, nous commençons par représenter chacun des ordres totaux par son graphe dans $E \times E$:

$$\left.\begin{aligned} R(\sigma) &= \{(x,y)/(x,y) \in E\times E,\ x<y\ (\text{pour } \sigma)\} \\ R(\omega) &= \{(x,y)/(x,y) \in E\times E,\ x<y\ (\text{pour } \omega)\} \\ R(\varpi) &= \{(x,y)/(x,y) \in E\times E,\ x<y\ (\text{pour } \varpi)\} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

L'indice brut entre ω et ϖ est le même que celui considéré dans le cas total [cf. [LERMAN (1973)]], il prend la forme

$$s(\omega,\varpi) = \text{card}\,[R(\omega) \cap R(\varpi)] = \sum \{\varphi(x,y)\psi(x,y)/(x,y) \in E\times E\} \quad (2)$$

où nous avons noté φ (resp. ψ) la fonction indicatrice de $R(\omega)$ (resp. $R(\varpi)$) dans $E \times E$.

Comme d'habitude card $[R(\omega) \cap R(\varpi')]$ et card $[R(\omega') \cap R(\varpi)]$ désigneront les deux v.a. duales associées dans l'h.a.l. pour laquelle ϖ' (resp. ω') est un élément aléatoire dans l'ensemble $\Omega(\varpi;\sigma)$ (resp. $\Omega(\omega;\sigma)$), de tous les ordres totaux sur E qui remplissent par rapport à σ une condition particulière que nous allons préciser.

$\Omega(\varpi;\sigma)$ est l'ensemble des ordres totaux ϖ_1 pour lesquels l'ordre partiel intersection de ϖ_1 avec σ, a la même structure que celui, intersection de ϖ avec σ. Dans ces conditions, H, G_1, G'_1, G_2 et G'_2 désignant respectivement l'ensemble des couples de couples d'objets de E de la forme $((x,y),(z,t))$, $((x,y),(x,t))$, $((x,y),(z,x))$, $((x,y),(z,y))$ et $((x,y),(y,t))$, où des lettres distinctes désignent des objets différents, les cardinaux suivants sont invariants lorsque ϖ_1 décrit son espace d'évolution $\Omega(\varpi;\sigma)$:

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathrm{card}[H\cap(R(\sigma)\cap R(\varpi_1))^{[2]}], & \mathrm{card}[H\cap(R(\sigma)\times S(\sigma))\cap(R(\varpi_1))^{[2]}],\\
\mathrm{card}[G_1\cap(R(\sigma)\cap R(\varpi_1))^{[2]}], & \mathrm{card}[G_1\cap(R(\sigma)\times S(\sigma))\cap(R(\varpi_1))^{[2]}],\\
\mathrm{card}[G'_1\cap(R(\sigma)\cap R(\varpi_1))^{[2]}], & \mathrm{card}[G'_1\cap(R(\sigma)\times S(\sigma))\cap(R(\varpi_1))^{[2]}],\\
\mathrm{card}[G_2\cap(R(\sigma)\cap R(\varpi_1))^{[2]}], & \mathrm{card}[G_2\cap(R(\sigma)\times S(\sigma))\cap(R(\varpi_1))^{[2]}],\\
\mathrm{card}[G'_2\cap(R(\sigma)\cap R(\varpi_1))^{[2]}], & \mathrm{card}[G'_2\cap(R(\sigma)\times S(\sigma))\cap(R(\varpi_1))^{[2]}].
\end{array}\right\}\quad(3)$$

où, rappelons le, nous notons $X^{[2]}$ l'ensemble des couples d'éléments distincts de X.

On a, bien entendu, une définition analogue de l'ensemble $\Omega(\omega;\sigma)$ dont nous laissons l'analyse au spécialiste de la combinatoire des ordres.

On peut vouloir étendre l'espace de variation de ϖ_1 (resp. ω_1) à l'ensemble $\Omega(\sigma,r)$ (resp. $\Omega(\sigma,s)$) de tous les ordres totaux pour lesquels

$$\varpi_1 \in \Omega(\sigma,r) \iff \mathrm{card}[R(\varpi_1)\cap R(\sigma)] = \mathrm{card}[R(\varpi)\cap R(\sigma)] = r$$

$$(\text{resp. } \omega_1 \in \Omega(\sigma,s) \iff \mathrm{card}[R(\omega_1)\cap R(\sigma)] = \mathrm{card}[R(\omega)\cap R(\sigma)] = s)$$

Cependant, le problème combinatoire qui consiste à appréhender la structure de l'ensemble $\Omega(\sigma,r)$, jusqu'à pouvoir résoudre tous les calculs de proportions conditionnelles que suppose l'évaluation de la moyenne et de la variance de la v.a. associée à l'indice brut $s(\omega,\varpi)$, est un problème difficile. Relativement à la question de l'énumération et de la génération algorithmique de $\Omega(\sigma, r)$, nous avons pu en numérotant les objets conformément à σ et en associant à chaque ordre ϖ_1 une permutation sur $\{1,2,\ldots,n\}$, engendrer algorithmiquement, conformément à l'ordre produit lexicographique des ordres σ, l'ensemble des $n!$ permutations sur $\{1,2,\ldots,n\}$. Nous avons de plus pu exprimer card$[R(\varpi_1) \cap R(\sigma)]$ en fonction du rang de la permutation associée à ϖ pour l'ordre "lexicographique" [LERMAN (1970)]. Ce résultat nous permet d'envisager de façon nettement plus efficace l'étude par simulation de la distribution de la v.a. card$[R(\omega) \cap R(\varpi')]$ où ϖ' est un élément aléatoire dans l'ensemble $\Omega(\sigma, r)$ muni d'une probabilité uniformément répartie, (voir [MORAN (1951)]).

Nous considérerons ici que ϖ' est un élément aléatoire de l'ensemble $\Omega(\varpi;\sigma)$ muni d'une probabilité uniforme, de plus, les calculs conditionnels que nous ferons le seront "en moyenne" ; ils ne retiendront d'un couple (x,y) d'objets de E que son appartenance $R(\sigma)$ ou à $S(\sigma)$ (partie complémentaire dans $E \times E$ de $R(\sigma)$), d'un couple de couples $((x,y),(x',y'))$ que sa structure (i.e. appartenance à H, G_1, G'_1, G_2 ou G'_2) ainsi que son appartenance à $R(\sigma) \times R(\sigma)$, $R(\sigma) \times S(\sigma)$ ou à $S(\sigma) \times S(\sigma)$.

Nous avons cherché au paragraphe IV.3. précédent, dans le cas de la comparaison de partitions, à justifier une telle approche. En revenant ici sur le dernier type d'argument pour signaler qu'on obtiendrait le même indice d'association partielle que celui proposé par M.G. Kendall si on se contentait de ne distinguer dans la structure propre d'un couple de couples $((x,y),(x',y'))$ que $(x',y')=(x,y)$ et $(x',y') \neq (x,y)$.

2-MOYENNE DE LA V.A. $\mathcal{S}(\omega, \varpi'; \sigma) = \text{card}[R(\omega) \cap R(\varpi')]$.

$$\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)=\sum\{\varphi(x,y)\,\psi'(x,y)\,/\,(x,y)\in E\times E\}, \qquad (4)$$

où ψ' est la fonction indicatrice de la partie aléatoire $R(\varpi')$ de $E\times E$.

$$\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)=\sum\{\varphi(x,y)\,\psi'(x,y)/(x,y)\in R(\sigma)\}$$
$$+\sum\{\varphi(x,y)\,\psi'(x,y)\,/\,(x,y)\in S(\sigma)\}. \qquad (5)$$

Le calcul de $\mathcal{E}[\mathcal{S}(\sigma,\varpi')]$ nécessite l'évaluation de chacune des deux expressions

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}[\psi'(x,y)\,/\,(x,y)\in R(\sigma)]\\ \mathcal{E}[\psi'(x,y)\,/\,(x,y)\in S(\sigma)].\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Comme nous l'avons annoncé, cette évaluation se fera <u>en moyenne</u> par rapport aux différents couples de $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$). Pour cela, nous désignerons par $s[(x,y)/(x,y)\in R(\sigma)]$ (resp. $s[(x,y)/(x,y)\in S(\sigma)]$) le nombre moyen de fois où un couple (x,y) de $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$) tombe dans $R(\varpi_1)$ lorsque ϖ_1 décrit son espace d'évolution $\Omega(\sigma,r)$. On a

$$s[(x,y)/(x,y)\in R(\sigma)]=\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum\Big\{\sum\{\varpi_1(x,y)/\varpi_1\in\Omega(\sigma,r)\}/$$
$$(x,y)\in R(\sigma)\Big\}, \qquad (7)$$

$$s[(x,y)/(x,y)\in S(\sigma)]=\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum\Big\{\sum\{\varpi_1(x,y)/\varpi_1\in\Omega(\sigma,r)\}/$$
$$(x,y)\in S(\sigma)\Big\}. \qquad (8)$$

En disant qu'un couple (x,y) se trouve "spécifié" par ϖ_1 si $(x,y)\in R(\varpi_1)$, nous allons calculer de deux façons différentes le nombre total de spécifications qui s'opèrent relativement aux couples appartenant à $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$), lorsque ϖ_1 décrit $\Omega(\sigma,r)$.

Pour $R(\sigma)$, ce nombre total est d'une part défini par

$$s[(x,y)/(x,y)\in R(\sigma)]\times \mathrm{card}[R(\sigma)], \qquad (9)$$

et d'autre part, par

$$card(\Omega(\sigma,r)) \times r \quad , \qquad (10)$$

puisque, par définition, chaque ϖ_1 de $\Omega(\sigma,r)$ spécifie r couples de $R(\sigma)$.

Il en résulte la valeur de la première expression (6) qui s'écrit

$$Pr\{\Psi'(x,y)=1/(x,y)\in R(\sigma)\} = \frac{r}{\binom{n}{2}} = \frac{card[R(\sigma)\cap R(\varpi)]}{card[R(\sigma)]} \qquad (11)$$

Par une démarche analogue on obtient la deuxième expression (6) :

$$Pr\{\Psi'(x,y)=1/(x,y)\in S(\sigma)\} = \frac{\binom{n}{2}-r}{\binom{n}{2}} = \frac{card[S(\sigma)\cap R(\varpi)]}{card[S(\sigma)]} \; ; \qquad (12)$$

en effet, si r est le cardinal de l'intersection de $R(\sigma)$ avec $R(\varpi_1)$, $(\binom{n}{2}-r)$ est le cardinal de l'intersection de $S(\sigma)$ avec $R(\varpi_1)$.

φ étant la fonction indicatrice de $R(\omega)$, on a finalement

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)] = \frac{card[R(\sigma)\cap R(\omega)]\, card[R(\sigma)\cap R(\varpi)]}{card[R(\sigma)]} + \frac{card[S(\sigma)\cap R(\omega)]\, card[S(\sigma)\cap R(\varpi)]}{card[S(\sigma)]} . \qquad (13)$$

Il en résulte l'expression de l'indice centré

$$card[R(\omega)\cap R(\varpi)] - \mathcal{E}[\mathcal{S}(\omega,\varpi')]$$
$$= card[R(\omega)\cap R(\varpi)] - \mathcal{E}[\mathcal{S}(\omega',\varpi)] \quad , \qquad (14) ,$$

compte tenu de la symétrie de l'expression (13).

3. INDEPENDANCE CONDITIONNELLE.

Nous allons préciser la notion d'indépendance conditionnelle sous jacente à notre coefficient d'association partielle dont nous venons de déterminer le numérateur:

La proportion relative de couples de $R(\omega)\cap R(\varpi)$ qui appartiennent à $R(\sigma)$ (resp. à $S(\sigma)$) est égale au produit de la proportion relative de couples de $R(\omega)\cap R(\sigma)$ (resp. $R(\omega)\cap S(\sigma)$) par la proportion relative de couples de $R(\varpi)\cap R(\sigma)$ (resp. $R(\varpi)\cap S(\sigma)$) ; ces proportions étant relatives à l'ensemble des couples de $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$).

Ainsi, une telle notion de l'indépendance conditionnelle se trouve caractérisée par les relations :

$$\frac{\text{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)\cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]}=\frac{\text{card}[R(\omega)\cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]}\times\frac{\text{card}[R(\varpi)\cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]}$$

$$\frac{\text{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)\cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]}=\frac{\text{card}[R(\omega)\cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]}\times\frac{\text{card}[R(\varpi)\cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]}\tag{15}$$

La première (resp. la seconde) des relations (15) donne $\text{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)\cap R(\sigma)]$ (resp. $\text{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)\cap S(\sigma)]$) et la décomposition

$$\text{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)]=\text{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)\cap R(\sigma)]+\text{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)\cap S(\sigma)]$$

montre que le coefficient d'association partielle est nul dans le cas de l'indépendance conditionnelle ainsi définie.

4- CALCUL DE LA VARIANCE DE LA V.A. $\mathcal{S}(\omega,\varpi;\sigma)$.

Le carré de la v.a. $\mathcal{S}(\omega,\varpi;\sigma)$ peut, avec des notations déjà introduites, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&\sum\{\varphi(u)\varphi(v)\psi'(u)\psi'(v)\,/\,(u,v)\in(R(\sigma))^{[2]}\}\\ +&\sum\{\varphi(u)\varphi(v)\psi'(u)\psi'(v)\,/\,(u,v)\in(S(\sigma))^{[2]}\}\\ +2&\sum\{\varphi(u)\varphi(v)\psi'(u)\psi'(v)\,/\,(u,v)\in R(\sigma)\times S(\sigma)\}.\end{aligned}\tag{16}$$

En décomposant l'ensemble d'indéxation conformément à la structure propre du couple de couples $(u,v)=((x,y),(x',y'))$, nous allons obtenir pour (16) quinze expressions sommes dont chacune se trouvera indéxée de façon différente; et ce, à raison de cinq expressions pour chacune des trois sommes. Ainsi, l'ensemble d'indéxation $(R(\sigma))^{[2]}$ se décomposera en

$$H\cap(R(\sigma))^{[2]}+G_1\cap(R(\sigma))^{[2]}+G'_1\cap(R(\sigma))^{[2]}+G_2\cap(R(\sigma))^{[2]}$$
$$+G'_2\cap(R(\sigma))^{[2]} \text{ (somme ensembliste)}; \tag{17}$$

en effet, l'intersection de $(R(\sigma))^{[2]}$ avec l'ensemble I des couples de couples d'objets de la forme $((x,y),(y,x))$, est vide.

Il en résulte la suite des calculs suivants à travers les différents sous paragraphes dont les numéros respectifs chercheront à suggérer au mieux le contenu.

4.r2.h- calcul de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\in H\cap(R(\sigma))^{[2]}]$.

Pour la détermination de cette espérance qui est une proportion conditionnelle, nous désignerons par $s[(u,v)/(u,v)\in H\cap(R(\sigma))^{[2]}]$ le nombre moyen de fois où un couple (u,v) de la forme $((x,y),(z,t))$ et appartenant à $(R(\sigma))^{[2]}$ tombe dans $R(\varpi_1)\times R(\varpi_1)$ lorsque ϖ_1 décrit son espace d'évolution $\Omega(\varpi;\sigma)$.

$$s[(u,v)/(u,v)\in H\cap(R(\sigma))^{[2]}]=\frac{1}{\operatorname{card}[H\cap(R(\sigma))^{[2]}]}\sum\Big\{\sum\{\varpi_1(u)\varpi_1(v)/\varpi_1\in\Omega(\varpi;\sigma)\}/(u,v)\in H\cap(R(\sigma))^{[2]}\Big\}. \tag{18}$$

On obtient aisément

$$\operatorname{card}[H\cap(R(\sigma))^{[2]}]=\binom{n}{2}\times\binom{n-2}{2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}. \tag{19}$$

En disant que (u,v) se trouve "spécifié" par ϖ_1 si $\varpi_1(u)\varpi_1(v)=1$, nous allons compter de deux façons différentes le nombre total de spécifications qui s'opèrent relativement aux couples de couples de $H \cap (R(\sigma))^{[2]}$ lorsque ϖ_1 décrit $\Omega(\varpi;\sigma)$. Ce nombre total est d'une part égal à

$$s[(u,v)/(u,v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}] \times \mathrm{card}[H \cap (R(\sigma))^{[2]}] \qquad (20)$$

et d'autre part, à

$$\mathrm{card}(\Omega(\varpi;\sigma)) \times \mathrm{card}(H \cap (R(\sigma) \cap R(\varpi))^{[2]}) , \qquad (21)$$

puisque par définition chaque ϖ_1 de $\Omega(\varpi;\sigma)$ spécifie le même nombre

$$\nu(h;\varpi,r2) = \mathrm{card}(H \cap (R(\sigma) \cap R(\varpi))^{[2]}) \qquad (22)$$

de couples (u,v) de $H \cap (R(\sigma))^{[2]}$ (cf. expressions (3)).

Finalement, la proportion cherchée qui représente l'espérance exprimée en titre de ce sous paragraphe, se met sous la forme

$$\pi(h;\varpi,r2) = \frac{s[(u,v)/(u,v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}]}{\mathrm{card}(\Omega(\varpi;\sigma))} \qquad (23)$$
$$= \frac{\nu(h;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]} .$$

D'autre part, conformément à (22), on notera

$$\nu(h;\omega,r2) = \sum \{\varphi(u)\varphi(v) / (u,v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}\}$$
$$= \mathrm{card}[H \cap (R(\sigma) \cap R(\omega))^{[2]}] . \qquad (24)$$

Les autres expressions-calculs qui interviennent dans l'évaluation du moment d'ordre 2 de la v.a. $\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)$ s'obtiennent par un procédé tout à fait analogue. Nous allons chercher à les exprimer plus rapidement en utilisant des notations de même forme que ci-dessus.

4.r2.g_1 - <u>expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]}]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante:

$$\pi(g_1;\varpi,r2)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in G_1\cap(R(\sigma))^{[2]}]}{card(\Omega(\varpi;\sigma))}$$

$$=\frac{\nu(g_1;\varpi,r2)}{card[G_1\cap(R(\sigma))^{[2]}]}=\frac{\nu(g_1;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/3]};(25)$$

après avoir montré que

$$card[G_1\cap(R(\sigma))^{[2]}]=n(n-1)(n-2)/3,\quad(26)$$

et où, on a noté

$$\nu(g_1;\varpi,r2)=card(G_1\cap(R(\sigma)\cap R(\varpi))^{[2]})\ .\quad(27)$$

D'autre part,

$$\nu(g_1;\omega,r2)=\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in G_1\cap(R(\sigma))^{[2]}\}$$

$$=card[G_1\cap(R(\sigma)\cap R(\omega))^{[2]}]\ .\quad(28)$$

4.r2.g_1'- expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\in G_1'\cap(R(\sigma))^{[2]}]$.

Cette espérance est définie par la proportion suivante:

$$\pi(g_1';\varpi,r2)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in G_1'\cap(R(\sigma))^{[2]}]}{card(\Omega(\varpi;\sigma))}$$

$$=\frac{\nu(g_1';\varpi,r2)}{card[G_1'\cap(R(\sigma))^{[2]}]}=\frac{\nu(g_1';\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/6]},(29)$$

après avoir montré que

$$card[G_1'\cap(R(\sigma))^{[2]}]=n(n-1)(n-2)/6\quad(30)$$

et où, on a noté

$$\nu(g_1';\varpi,r2)=card[G_1'\cap(R(\sigma)\cap R(\varpi))^{[2]}].\quad(31)$$

D'autre part,

$$\nu[g_1';\omega,r2)=\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in G_1'\cap(R(\sigma))^{[2]}\}$$

$$=card[G_1'\cap(R(\sigma)\cap R(\omega))^{[2]}]\ .\quad(32)$$

4.r2.g_2- expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\in G_2\cap(R(\sigma))^{[2]}]$.

Cette espérance représente la proportion suivante :

$$\pi(g_2;\varpi,r2)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in G_2\cap(R(o))^{[2]}]}{card(\Omega(\varpi;\sigma))}$$

$$=\frac{\nu(g_2;\varpi,r2)}{card[G_2\cap(R(o))^{[2]}]}=\frac{\nu(g_2;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/3]},\quad(33)$$

après avoir montré que

$$card[G_2\cap(R(\sigma))^{[2]}]=card[G_1\cap(R(\sigma))^{[2]}]=[n(n-1)(n-2)/3],\quad(34)$$

et où, on a noté

$$\nu(g_2;\varpi,r2)=card[G_2\cap(R(o)\cap R(\varpi))^{[2]}].\quad(35)$$

D'autre part,

$$\nu(g_2;\omega,r2)=\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in G_2\cap(R(\sigma))^{[2]}\}$$

$$=card[G_2\cap(R(\sigma)\cap R(\omega))^{[2]}].\quad(36)$$

4.r2.g'_2 - <u>expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\in G'_2\cap(R(o))^{[2]}]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante:

$$\pi(g'_2;\varpi,r2)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in G'_2\cap(R(o))^{[2]}]}{card(\Omega(\varpi;\sigma))}$$

$$=\frac{\nu(g'_2;\varpi,r2)}{card(G'_2\cap(R(o))^{[2]}]}=\frac{\nu(g'_2;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/6]},\quad(37)$$

après avoir établi que

$$card[G'_2\cap(R(o))^{[2]}]=card[G'_1\cap(R(\sigma))^{[2]}]=n(n-1)(n-2)/6\quad(38)$$

et où, on note

$$\nu(g'_2;\varpi,r2)=card[G'_2\cap(R(o)\cap R(\varpi))^{[2]}].\quad(39)$$

D'autre part,

$$\nu(g'_2;\omega,r2)=\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in G'_2\cap(R(o))^{[2]}\}$$

$$=card[G'_2\cap(R(\sigma)\cap R(\omega))^{[2]}].\quad(40)$$

On peut maintenant vérifier que la somme des cardinaux représentés dans les formules (19), (26), (30), (34) et (38) correspond bien au cardinal de $(R(o))^{[2]}$ qui est égal à $(n-2)(n-1)n(n+1)/4$.

4.rs.h- <u>expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\in H\cap(R(o)\times S(o))]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(h;\varpi,rs)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in H\cap(R(o)\times S(o))]}{\mathrm{card}(\Omega(\varpi;o))}$$

$$=\frac{\nu(h;\varpi,rs)}{\mathrm{card}(H\cap(R(o)\times S(o))]}=\frac{\nu(h;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]},\quad(41)$$

après avoir montré que

$$\mathrm{card}[H\cap(R(o)\times S(o))]=n(n-1)(n-2)(n-3)/4\qquad(42)$$

et où, on note

$$\nu(h;\varpi,rs)=\mathrm{card}[H\cap(R(o)\times S(o))\cap(R(\varpi))^{[2]}],\qquad(43)$$

qui est supposé invariable dans le cadre de l'h.a.l. (cf. § 1 ci-dessus).

D'autre part,

$$\nu(h;\omega,rs)=\square\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in H\cap(R(o)\times S(o))\}$$

$$=\mathrm{card}[H\cap(R(o)\times S(o))\cap(R(\omega))^{[2]}]\ .\qquad(44)$$

4.rs.g_1- <u>expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v)\in G_1\cap(R(o)\times S(o))]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g_1;\varpi,rs)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in G_1\cap(R(o)\times S(o))]}{\mathrm{card}(\Omega(\varpi;o))}$$

$$=\frac{\nu(g_1;\varpi,rs)}{\mathrm{card}[G_1\cap(R(o)\times S(o))]}=\frac{\nu(g_1;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]},\quad(45)$$

après avoir montré que

$$\mathrm{card}[G_1 \cap (R(o) \times S(o))] = n(n-1)(n-2)/6 \qquad (46)$$

et où on note

$$\nu(g_1\,;\varpi, rs) = \mathrm{card}[G_1 \cap (R(o) \times S(o)) \cap (R(\varpi))^{[2]}], \quad (47)$$

qui est constant dans le cadre de l'h.a.l. considérée ici, (cf. §1).

Par ailleurs,

$$\nu(g_1\,;\omega, rs) = \sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(o) \times S(o))\}$$
$$= \mathrm{card}[G_1 \cap (R(o) \times S(o)) \cap (R(\omega))^{[2]}]\,. \qquad (48)$$

4.rs.g'_1– expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \in G'_1 \cap (R(o) \times S(o))]$.

Cette espérance est définie par la proportion suivante:

$$\pi(g'_1\,;\varpi, rs) = \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G'_1 \cap (R(o) \times S(o))]}{\mathrm{card}(\Omega(\varpi\,;\sigma))}$$
$$= \frac{\nu(g'_1\,;\varpi, rs)}{\mathrm{card}[G'_1 \cap (R(o) \times S(o))]} = \frac{\nu(g'_1\,;\varpi, rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]}\,, \quad (49)$$

en ayant montré que

$$\mathrm{card}[G'_1 \cap (R(o) \times S(o))] = n(n-1)(n-2)/3 \qquad (50)$$

et où on note

$$\nu(g'_1\,;\varpi, rs) = \mathrm{card}[G'_1 \cap (R(o) \times S(o)) \cap (R(\varpi))^{[2]}], \quad (50)$$

(cf. §1).

D'autre part,

$$\nu(g'_1\,;\omega, rs) = \sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v) \in G'_1 \cap (R(o) \times S(o))\}$$
$$= \mathrm{card}[G'_1 \cap (R(o) \times S(o)) \cap (R(\omega))^{[2]}]\,. \qquad (51)$$

4.rs.g_2– expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \in G_2 \cap (R(o) \times S(o))]$.

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g_2;\varpi,rs)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in G_2\cap(R(0)\times S(0))]}{\mathrm{card}(\Omega(\varpi;0))}$$

$$=\frac{\nu(g_2;\varpi,rs)}{\mathrm{card}\,[G_2\cap(R(0)\times S(0))]}=\frac{\nu(g_2;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]}\,,\quad(52)$$

en ayant montré que

$$\mathrm{card}\,[G_2\cap(R(0)\times S(0))]=\mathrm{card}\,[G_1\cap(R(0)\times S(0))]$$
$$=n(n-1)(n-2)/6.\qquad(53)$$

et où on note

$$\nu(g_2;\varpi,rs)=\mathrm{card}\,[G_2\cap(R(0)\times S(0))\cap(R(\varpi))^{[2]}].\quad(54)$$

D'autre part,

$$\nu(g_2;\omega,rs)=\sum\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\in G_2\cap(R(0)\times S(0))\}$$
$$=\mathrm{card}\,[G_2\cap(R(0)\times S(0))\cap(R(\omega))^{[2]}].\qquad(55)$$

4.rs.g'_2- <u>expression de $E[\Psi'(u)\,\Psi'(v)/(u,v)\in G'_2\cap(R(0)\times S(0))]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g'_2;\varpi,rs)=\frac{s[(u,v)/(u,v)\in G'_2\cap(R(0)\times S(0))]}{\mathrm{card}(\Omega(\varpi;0))}$$

$$=\frac{\nu(g'_2;\varpi,rs)}{\mathrm{card}\,[G'_2\cap(R(0)\times S(0))]}=\frac{\nu(g'_2;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]}\,,\quad(56)$$

après avoir montré que

$$\mathrm{card}\,[G'_2\cap(R(0)\times S(0))]=\mathrm{card}\,[G'_1\cap(R(0)\times S(0))]$$
$$=n(n-1)(n-2)/3\qquad(57)$$

et où, on note

$$\nu(g'_2;\varpi,rs)=\mathrm{card}\,[G'_2\cap(R(0)\times S(0))\cap(R(\varpi))^{[2]}].\quad(58)$$

D'autre part,

$$\nu(g_2'\,;\omega,rs) = \sqsubset\{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v)\leftarrow G_2'\cap(R(0)\times S(0))\}$$
$$= \mathrm{card}\,[G_2'\cap(R(0)\times S(0))\cap(R(\omega))^{[2]}]\,. \quad (59)$$

Désignons ici par I l'ensemble des couples de couples de la forme $((x,y),(y,x))$, on a immédiatement

$$\mathrm{card}\,[I\cap(R(0)\times S(0))] = n(n-1)/2\;, \qquad (60)$$

$$\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v)\leftarrow I\cap(R(0)\times S(0))] = 0\;, \qquad (61)$$

$$\sqsubset\{\varphi(u)\varphi(v)/\,(u,v)\leftarrow I\cap(R(0)\times S(0))\}$$
$$= \mathrm{card}\,[I\cap(R(0)\times S(0))\cap(R(\omega))^{[2]}] = 0\;. \quad (62)$$

On peut maintenant vérifier que la somme des cardinaux (42), (46), (50), (53), (57) et (60) correspond bien au cardinal de $(R(0)\times S(0))$ qui est égal à $[n(n-1)/2]^2$.

4.s2.h- <u>expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v)\leftarrow H\cap(S(0))^{[2]}]$.</u>

Nous avons besoin ici de l'invariance, non directement supposée (cf. formules (3) §1 ci-dessus), du cardinal

$$\nu(h\,;\varpi_1,s2) = \mathrm{card}\,[H\cap(S(0)\cap R(\varpi_1))^{[2]}] \qquad (63)$$

lorsque ϖ_1 décrit son espace d'évolution $\Omega(\varpi;0)$. Toutefois, on a la formule

$$\nu(h\,;\varpi_1,s2) + 2\,\nu(h\,;\varpi_1,rs) + \nu(h\,;\varpi_1,r2) = \nu(h\,;\varpi_1)$$
$$= \mathrm{card}[H\cap(R(\varpi))^{[2]}] = n(n-1)(n-2)(n-3)/4, \quad (64)$$

qui montre que $\nu(h\,;\varpi_1,s2)$ est constant et s'exprime par rapport à $\nu(h\,;\varpi_1,r2)$ et à $\nu(h\,;\varpi_1,rs)$.

Ce type de relation ne dépend pas de la nature de l'ensemble H, nous la reprendrons pour G_1, G_1', G_2 et G_2'.

Toujours avec le même type de notations, l'espérance représentée en titre de ce sous paragraphe est définie par la proportion suivante :

$$\pi(h ; \varpi, s2) = \frac{s[(u,v)/(u,v) \in H \cap (S(o))^{[2]}]}{card(\Omega(\varpi ; \sigma))}$$

$$= \frac{\nu(h ; \varpi, s2)}{card[H \cap (S(o))^{[2]}]} = \frac{\nu(h ; \varpi, s2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]} . \quad (65)$$

D'autre part,

$$\nu(h ; \omega, s2) = \sum \{\varphi(u)\varphi(v) / (u,v) \in H \cap (S(o))^{[2]}\}$$
$$= card[H \cap (S(o) \cap R(\omega))^{[2]}] . \quad (66)$$

4.S2.g_1- <u>expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \in G_1 \cap (S(o))^{[2]}]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g_1 ; \varpi, s2) = \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_1 \cap (S(o))^{[2]}]}{card(\Omega(\varpi ; \sigma))}$$

$$= \frac{\nu(g_1 ; \varpi, s2)}{card[G_1 \cap (S(o))^{[2]}]} = \frac{\nu(g_1 ; \varpi, s2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} . \quad (67)$$

D'autre part,

$$\nu(g_1 ; \omega, s2) = \sum \{\varphi(u)\varphi(v) / (u,v) \in G_1 \cap (S(o))^{[2]}\}$$
$$= card[G_1 \cap (S(o) \cap R(\omega))^{[2]}] . \quad (68)$$

4.S2.g'_1- <u>expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \in G'_1 \cap (S(o))^{[2]}]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g'_1 ; \varpi, s2) = \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G'_1 \cap (S(o))^{[2]}]}{card(\Omega(\varpi ; \sigma))}$$

$$= \frac{\nu(g'_1\,;\varpi, S2)}{\text{card}\,[G'_1 \cap (S(0))^{[2]}]} = \frac{\nu(g'_1\,;\varpi, S2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} \,. \quad (69)$$

D'autre part,

$$\nu(g'_1\,;\omega, S2) = \sum \{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v) \in G'_1 \cap (S(0))^{[2]}\}$$
$$= \text{card}\,[G'_1 \cap (S(0) \cap R(\omega))^{[2]}]. \quad (70)$$

4.S2.g_2 - <u>expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G_2 \cap (S(0))^{[2]}]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g_2\,;\varpi, S2) = \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_2 \cap (S(0))^{[2]}]}{\text{card}\,(\Omega(\varpi\,;0))}$$

$$= \frac{\nu(g_2\,;\varpi, S2)}{\text{card}\,[G_2 \cap (S(0))^{[2]}]} = \frac{\nu(g_2\,;\varpi, S2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} \,. \quad (71)$$

D'autre part,

$$\nu(g_2\,;\varpi, S2) = \sum \{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v) \in G_2 \cap (S(0))^{[2]}\}$$
$$= \text{card}\,[G_2 \cap (S(0) \cap R(\omega))^{[2]}] \,. \quad (72)$$

4.S2.g'_2 - <u>expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G'_2 \cap (S(0))^{[2]}]$.</u>

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g'_2\,;\varpi, S2) = \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G'_2 \cap (S(0))^{[2]}]}{\text{card}\,(\Omega(\varpi\,;0))}$$

$$= \frac{\nu(g'_2\,;\varpi, S2)}{\text{card}\,[G'_2 \cap (S(0))^{[2]}]} = \frac{\nu(g'_2\,;\varpi, S2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} \,. \quad (73)$$

D'autre part,

$$\nu(g'_2\,;\omega, S2) = \sum \{\varphi(u)\varphi(v)/(u,v) \in G'_2 \cap (S(0))^{[2]}\}$$
$$= \text{card}\,[G'_2 \cap (S(0) \cap R(\omega))^{[2]}]. \quad (74)$$

THEOREME 1-Sous les conditions de calcul précisées (cf. § 1 ci-dessus), dans le cadre de l'h.a.l. définie (cf. § 1 ci-dessus), la moyenne et la variance de la v.a. $\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)$ sont respectivement

$$\mu(\omega,\varpi';\sigma)=\{\mathrm{card}[R(\sigma)\cap R(\omega)]+\mathrm{card}[R(\sigma)\cap R(\varpi)]\}/\mathrm{card}[R(\sigma)]$$
$$+\{\mathrm{card}[S(\sigma)\cap R(\omega)]+\mathrm{card}[S(\sigma)\cap R(\varpi)]\}/\mathrm{card}[S(\sigma)] \quad (75)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\omega,\varpi';\sigma)= {} & \frac{\nu(h;\omega,r2)\,\nu(h;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]}+\frac{\nu(g_1;\omega,r2)\,\nu(g_1;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/3]}\\
&+\frac{\nu(g'_1;\omega,r2)\,\nu(g'_1;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/6]}+\frac{\nu(g_2;\omega,r2)\,\nu(g_2;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/3]}\\
&+\frac{\nu(g'_2;\omega,r2)\,\nu(g'_2;\varpi,r2)}{[n(n-1)(n-2)/6]}\\
&+\frac{\nu(h;\omega,s2)\,\nu(h;\varpi,s2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]}+\frac{\nu(g_1;\omega,s2)\,\nu(g_1;\varpi,s2)}{[n(n-1)(n-2)/3]}\\
&+\frac{\nu(g'_1;\omega,s2)\,\nu(g'_1;\varpi,s2)}{[n(n-1)(n-2)/6]}+\frac{\nu(g_2;\omega,s2)\,\nu(g_2;\varpi,s2)}{[n(n-1)(n-2)/3]}\\
&+\frac{\nu(g'_2;\omega,s2)\,\nu(g'_2;\varpi,s2)}{[n(n-1)(n-2)/6]}\\
&+2\Big\{\frac{\nu(h;\omega,rs)\,\nu(h;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]}+\frac{\nu(g_1;\omega,rs)\,\nu(g'_1;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]}\\
&+\frac{\nu(g'_1;\omega,rs)\,\nu(g'_1;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]}+\frac{\nu(g_2;\omega,rs)\,\nu(g_2;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]}\\
&+\frac{\nu(g'_2;\omega,rs)\,\nu(g'_2;\varpi,rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]}\Big\}, \qquad (76)
\end{aligned}$$

où les notations ont été dûment explicitées dans les derniers sous paragraphes.

L'indice de corrélation partielle $r_{\omega\varpi.\sigma}$ est donné par la formule

$$r_{\omega\varpi.\sigma} = [s(\omega,\varpi) - \mu(\omega,\varpi';\sigma)]/\sqrt{var(\omega,\varpi';\sigma)} \;, \qquad (77)$$

où $s(\omega,\varpi)$ est l'indice brut $card[R(\omega)\cap R(\varpi)]$ (cf. formule (2) ci-dessus).

La v.a. $\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)$ se trouve en fait déterminée par l'expression calculée «globalement» (comme cela a été le cas pour la moyenne et le moment d'ordre 2) de la suite de ses moments successifs.

On a pu remarquer la symétrie parfaite, par rapport à ω et ϖ, des expressions de la moyenne et de la variance de la v.a. $\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)$. De sorte que le résultat aurait été le même si les calculs avaient été effectués par rapport à la v.a. $\mathcal{S}(\omega',\varpi;\sigma)$ dont la définition est claire conformément à celle de $\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)$.

On décomposant l'ensemble $(E^{[2]})^{[q]}$ des q-uples de couples à composantes distinctes et dont deux quelconques sont différents, en sous ensembles dont chacun est formé de l'ensemble des q-uples de couples de même configuration (cf. [LERMAN (1973)]), on peut montrer que le moment absolu d'ordre quelconque fixé, calculé «globalement» de la v.a. $\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)$ est identique à celui de la v.a. $\mathcal{S}(\omega',\varpi';\sigma)$. Dans ces conditions, on peut proposer la propriété suivante :

<u>THEOREME 2</u> - Dans le cadre de l'h.a.l. à caractère partiel et «global» (cf. §1 ci-dessus), la distribution de la v.a. $\mathcal{S}(\omega,\varpi';\sigma)$ est la même que celle de $\mathcal{S}(\omega',\omega;\sigma)$.

5. ANALYSE DE L'APPROCHE DE M.G. KENDALL.

Comme nous le signalions dans l'introduction générale M.G. Kendall [KENDALL (1942)] introduit le tableau suivant de croisement dans $R(\sigma)$ des deux attributs définis par les parties $R(\omega)$ et $R(\varpi)$:

	$R(\sigma)\cap R(\omega)$	$R(\sigma)\cap S(\omega)$	
$R(\sigma)\cap R(\varpi)$	a	b	$a+b$
$R(\sigma)\cap S(\varpi)$	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$ $= \mathrm{card}[R(\sigma)]$.

Il définit dans ces conditions, le coefficient d'association partielle entre ω et ϖ, relativement à σ, $\tau_{\omega\varpi.\sigma}$, par le coefficient de K. Pearson :

$$\tau_{\omega\varpi.\sigma} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad . \qquad (78)$$

L'indépendance, ici conditionnelle relativement à $R(\sigma)$ se trouve nécessairement définie par la relation

$$\frac{a}{a+c} = \frac{a+b}{a+b+c+d} , \qquad (79)$$

qu'on peut expliciter sous la forme :

$$\frac{\mathrm{card}[R(\omega)\cap R(\varpi)\cap R(\sigma)]}{\mathrm{card}[R(\sigma)]} = \frac{\mathrm{card}[R(\omega)\cap R(\sigma)]}{\mathrm{card}[R(\sigma)]} \times \frac{\mathrm{card}[R(\varpi)\cap R(\sigma)]}{\mathrm{card}[R(\sigma)]} . \qquad (80)$$

Les marges de la table de croisement étant fixées, la relation (79) est équivalente à la relation suivante :

$$\frac{d}{b+d} = \frac{c+d}{a+b+c+d} \qquad (81)$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{card}[S(\omega)\cap S(\otimes)\cap R(\sigma)]}{\mathrm{card}[R(\sigma)]} = \frac{\mathrm{card}[S(\omega)\cap R(\sigma)]}{\mathrm{card}[R(\sigma)]} \times \frac{\mathrm{card}[S(\otimes)\cap R(\sigma)]}{\mathrm{card}[R(\sigma)]}. \qquad (82)$$

Or, il y a une correspondance bijective respectivement entre

$$R(\sigma) \quad \text{et} \quad S(\sigma),$$

$$S(\omega)\cap R(\sigma) \quad \text{et} \quad R(\omega)\cap S(\sigma),$$

$$S(\otimes)\cap R(\sigma) \quad \text{et} \quad R(\otimes)\cap S(\sigma),$$

$$S(\omega)\cap S(\otimes)\cap R(\sigma) \quad \text{et} \quad R(\omega)\cap R(\otimes)\cap S(\sigma);$$

en effet si (x,y) appartient à l'un des ensembles (de gauche), (y,x) appartient à l'ensemble associé (de droite). De sorte que la relation (82) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\mathrm{card}[R(\omega)\cap R(\otimes)\cap S(\sigma)]}{\mathrm{card}[S(\sigma)]} = \frac{\mathrm{card}[R(\omega)\cap S(\sigma)]}{\mathrm{card}[S(\sigma)]} \times \frac{\mathrm{card}[R(\otimes)\cap S(\sigma)]}{\mathrm{card}[S(\sigma)]} \qquad (83)$$

Les relations (80) et (83) correspondent exactement aux relations (15) ci-dessus.

PROPRIETE 1. L'indépendance dans $R(\sigma)$ entre les deux attributs représentés par $R(\omega)$ et $R(\otimes)$ est équivalente à l'indépendance conditionnelle telle qu'elle a été définie ci-dessus (cf. § 3).

La démarche de M.G. Kendall n'aurait pas permis d'aboutir à ce résultat si les parties à comparer ne représentaient pas les graphes de relations d'ordre total. Nous allons en effet considérer l'exemple suivant où le cardinal n de E vaut 6 ; dans ces conditions, le cardinal de $E^{[2]}$ est 30 et celui d'un sous ensemble de $E^{[2]}$ représentant un ordre total, 15. Codons $E^{[2]}$ par la suite des trente premiers entiers :

$$E^{[2]} = \{1,2,\ldots\ldots,30\}.$$

A la place de $R(\sigma)$, $R(\omega)$ et $R(\varpi)$, nous allons considérer trois parties A, B et C de même cardinal 15, mais ayant un caractère quelconque :

$A = \{1, 2, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Construisons les deux tables de croisement des deux attributs définis par B et C, dans A d'une part et dans A^c d'autre part:

	$A\cap B$	$A\cap B^c$	
$A\cap C$	$a=2$	$b=4$	$a+b=6$
$A\cap C^c$	$c=3$	$d=6$	$c+d=9$
	$a+c=5$	$b+d=10$	15

	$A^c\cap B$	$A^c\cap B^c$	
$A^c\cap C$	$a'=8$	$b'=1$	$a'+b'=9$
$A^c\cap C^c$	$c'=2$	$d'=4$	$c'+d'=6$
	$a'+c'=10$	$b'+d'=5$	15

On voit qu'on a la relation :

$$\frac{a}{a+c} = \frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{2}{5} \quad ;$$

mais

$$\frac{a'}{a'+c'} = \frac{4}{5} \neq \frac{a'+b'}{a'+b'+c'+d'} = \frac{3}{5} \quad ;$$

ainsi, les deux attributs représentés par B et C sont indépendants dans A, mais dépendants dans A^c.

L'indice brut du lien entre $R(\omega)$ et $R(\varpi)$ dans $R(\sigma)$ peut s'écrire :

$$\mathrm{card}\,[R(\sigma)\cap R(\omega)\cap R(\varpi)]=a\ ,$$

celui dans $S(\sigma)$ peut à son tour s'écrire :

$$\mathrm{card}\,[S(\sigma)\cap R(\omega)\cap R(\varpi)=\mathrm{card}[R(\sigma)\cap S(\omega)\cap S(\varpi)]=d. \quad (84)$$

Compte tenu de la relation

$$d= a+\binom{n}{2}-(a+b)-(a+c)$$
$$= a+\binom{n}{2}-\mathrm{card}\,[R(\sigma)\cap R(\omega)]-\mathrm{card}[R(\sigma)\cap R(\varpi)], \quad (85)$$

l'indice centré dans $R(\sigma)$ qui s'écrit

$$a-\frac{(a+b)(a+c)}{\binom{n}{2}} \qquad (86)$$

est égal à celui centré dans $S(\sigma)$ qui peut s'écrire

$$d-\frac{(c+d)(b+d)}{\binom{n}{2}}\ , \qquad (87)$$

leur valeur commune peut se mettre sous la forme

$$(ad-bc)/\binom{n}{2}\ . \qquad (88)$$

Le numérateur de notre indice d'association partielle se met sous la forme de la somme des deux expressions (86) et (87) ; il est par conséquent égal à $(ad-bc)/n(n-1)$.

PROPRIETE 2 - La part dans $R(\sigma)$ du lien « centré » entre $R(\omega)$ et $R(\varpi)$ est identique à celle dans $S(\sigma)$.

COROLLAIRE - Le numérateur de notre indice d'association partielle est à un coefficient multiplicatif près identique à celui de M.G. Kendall.

Insistons encore une fois sur le fait que la cohérence de l'indice de M.G. Kendall est intimement liée à la structure particulière du graphe d'un ordre total (cf. (84)). On n'a pas une propriété analogue à celle 2 ci-dessus si les relations à comparer étaient d'une autre nature (cf. § II ci-dessus).

Comme c'est le cas pour l'indice de K. Pearson dans le cas total de la comparaison de deux attributs, l'indice d'association partielle $\tau_{\omega\varpi.\sigma}$ peut être obtenu en centrant et en réduisant l'indice brut

$$s = \operatorname{card}\{[R(\sigma)\cap R(\omega)]\cap[R(\sigma)\cap R(\varpi)]\} \qquad (89)$$

relativement à une h.a.l. où à la partie $B = R(\sigma)\cap R(\omega)$ (resp. $C = R(\sigma)\cap R(\varpi)$) de $R(\sigma)$, on associe une partie aléatoire B' (resp. C') dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de <u>toutes</u> les parties de cardinal $(a+c)$ (resp. $(a+b)$) de $R(\sigma)$.

Répétons que, conformément à notre démarche de calcul exprimée au paragraphe 1 ci-dessus, on obtiendrait le même indice si dans le calcul de la variance (cf. § 4), on ne distinguait relativement à un couple de couples d'objets $((x,y),(x',y'))$ que si les deux couples (x,y) et (x',y') sont différents ou identiques. Nous pensons dans ces conditions que le calcul que nous proposons de la variance est plus précis en ce sens qu'il tient mieux compte de la nature des structures à comparer. A cet égard, contrairement à ce qu'on peut rapidement croire, la réduction de l'indice centré revêt une importance capitale pour l'organisation des liens entre variables comme nous avons pu nous en rendre compte dans la pratique.

Nous allons maintenant chercher à comprendre d'une certaine façon le résultat suivant mentionné dans l'introduction générale (cf. § I) que M.G. Kendall attribue avec étonnement à une coïncidence :

$$\tau_{\omega\varpi.\sigma} = \frac{\tau_{\omega\varpi} - \tau_{\omega\sigma}\,\tau_{\varpi\sigma}}{\sqrt{1-\tau^2_{\omega\sigma}}\,\sqrt{1-\tau^2_{\varpi\sigma}}} \qquad (90)$$

Notre explication reposera sur les résultats du paragraphe II précédent ainsi que sur l'analyse de la forme de l'indice τ entre deux variables "rang".

Désignons ici par σ, ω et ϖ les attributs qui sont relativement à $E^{[2]}$, représentés par les parties $R(\sigma)$, $R(\omega)$ et $R(\varpi)$. L'indice τ de M.G. Kendall entre deux variables "rang" peut parfaitement être obtenu en ignorant complètement le caractère ordinal des structures à comparer, c'est à dire, à partir de celui de K. Pearson. Relativement par exemple à ω et ϖ, l'indice centré, conformément à une h.a.l. « libre » où à $R(\omega)$ (resp. $R(\varpi)$) on associe un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les parties de $E^{[2]}$ de même cardinal $n(n-1)/2$, se met sous la forme :

$$\mathrm{card}\,[R(\omega)\cap R(\varpi)] - n(n-1)/4 \qquad (91)$$

qui représente la moitié du numérateur de l'indice $\tau_{\omega\varpi}$. Le dénominateur s'obtient en évaluant le maximum de la valeur absolue de l'expression (91) qui est égal à $n(n-1)/4$. L'indice

$$\{\mathrm{card}\,[R(\omega)\cap R(\varpi)] - [n(n-1)/4]\}/[n(n-1)/4] \qquad (92)$$

est exactement celui $\tau_{\omega\varpi}$.

Il peut, conformément aux expressions (11) du paragraphe II, se mettre sous la forme

$$4\,[p(\omega\wedge\varpi) - p(\omega)\,p(\varpi)] = \rho(\omega,\varpi), \qquad (93)$$

dans le sens que nous venons de donner à ω et ϖ.

Par ailleurs, par rapport à la définition du coefficient d'association partielle entre ω et ϖ relativement à σ, nous venons de voir que la part du lien centré dans $R(\sigma)$ est égale à celle dans $S(\sigma)$; de sorte que le numérateur du coefficient $\tau_{\omega\varpi.\sigma}$ représente la moitié de celui où on regarderait ω, ϖ et σ comme des attributs (cf. § II). La relation (14) du paragraphe II, ainsi que celle (93) ci-dessus, montrent que, à un coefficient multiplicatif près,

$$r_{\omega\varpi\cdot\sigma} = r_{\omega\varpi} - r_{\omega\sigma} r_{\varpi\sigma} . \qquad (94)$$

Quant à la forme du dénominateur du deuxième membre de (90); elle s'explique par la relation (93) et pour des raisons de normalisations qui ne peuvent que coïncider : la première normalisation se concevant dans le cadre de l'indice d'association de K. Pearson et la seconde, dans le cadre classique du coefficient de corrélation partielle.

VII _ CONCLUSION.

Au terme de cette longue étude à la croisée de l'analyse non linéaire des données et de la statistique non paramétrique, il reste encore beaucoup à faire ...

Le dernier paragraphe pourra stimuler le spécialiste de la combinatoire dans l'analyse, à des fins énumératives de la structure de l'intersection de deux ordres totaux sur un ensemble fini.

Nous avons déjà signalé que grâce à des résultats antérieurs, nous pouvions envisager une étude efficace par simulation dans le cas de la comparaison partielle entre ordres totaux, ce qui correspondrait à un net progrès par rapport à la tentative de Moran. Cette étude ne pourrait être sans un fin programme informatique.

Une recherche algorithmique particulière est également nécessaire pour l'informatisation du calcul des indices d'association partielle, dans les différents cas, surtout lorsqu'il s'agit d'établir toute la table des indices entre éléments d'un ensemble V de variables descriptives, partiels, relativement à une variable w exogène ($w \notin V$).

Signalons qu'une des motivations source de ce travail a été une étude sur la répartition des dépenses d'un ensemble de ménages sur différents postes, où on n'a pu dégager par la classification une organisation cohérente et nuancée de l'ensemble des postes de dépense qu'en neutralisant la variable "revenu du ménage".

Plus généralement, on peut se poser la question de savoir ce que deviennent les différents comportements dégagés à partir de la classification de l'ensemble V des variables descriptives si on neutralisait l'influence d'une variable w fortement discriminante ($w \notin V$). Cette approche répond à la démarche du chercheur en sciences humaines qui désire éliminer dans son analyse l'influence de facteurs bien connus. Nous espérons que ce dernier trouvera ici un outil adapté. Toutefois, pour qu'il puisse en tirer profit, la collaboration doit être plus que jamais étroite avec le statisticien qui cherche à valider sa méthode et l'informaticien appliqué, son programme.

BIBLIOGRAPHIE

DANIELS H.E., "The relation between measures of correlation in the universe of sample permutations", Biometrika 33, 129-35, (1944).

DAUDIN J.J., " Coefficient de Tschuprow partiel et indépendance conditionnelle", Statistique et Analyse des Données, 55-58, (1979).

DAUDIN J.J., " Partial association measures and an application to qualitative regression", Biometrika 67, 581-90, (1980).

KENDALL M.G., " Rank correlation methods" 4 th edition, London : Griffin, (1970).

LECALVE G., "Problèmes d'analyse des données", thèse d'état (2ème partie), Université de Rennes I, (1976).

LERMAN I.C., " Les bases de la classification automatique", Gauthier-Villars, Paris (1970).

LERMAN I.C., " Etude distributionnelle de statistiques de proximité entre structures finies de même type; application à la classification automatique", Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, série recherche, n° 19 (1973).

LERMAN I.C., "Formal analysis of a general notion of proximity between variables", Actes du colloque "Congrès Européen des statisticiens", Grenoble, Septembre 1976, paris chez North Holland en 1977.

LERMAN I.C., GRAS R. et ROSTAM H., " Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires" I & II, Revue Mathématiques et Sciences Humaines, n° 74 p. 5-35 et n° 75 (à paraître), (1981)

MORAN P.A.P., " Partial and multiple rank correlation", Biometrika, 38, 26-32, (1951).

SAPORTA G., "Quelques applications des opérateurs d'Escoufier au traitement des variables qualitatives", Statistique et Analyse des Données, 1, 38-46, (1976).

SOMMERS H.R., "Analysis of partial rank correlation measures based on the product-moment model : part one", Social forces, vol. 53 : 2, (déc 1974).

WALD A. and WOLFOWITZ., "Statistical tests based on permutations of the observations", Ann. Math. Stat., vol. 15, p. 358, (1944).

NŒTHER G.E., "On a theorem by Wald and Wolfowitz", Ann. Math. Stat., vol 20, p. 455, (1949).

PI 57. Etude et conception de systèmes informatiques répartis - Rapport n° 2. Evaluation de performances..
G. Fabre, A. Lehon, R. Negaret, G. Le Lann., 84 pages - *Décembre 1976*

PI 58. On greatest fixpoints..
W.P. De Roever, 11 pages - *Décembre 1976*

PI 59. A versatil programmable hardware monitor.
Y. Bekkers, B. Decouty, 17 pages - *Janvier 1977*

PI 60. Projet FRERES : Interrogation de Fichiers Répartis sur un réseau de calculateurs hétérogènes..
P. Bosc, A. Chauflaut, J. Le Palmec, J.M. Villard, 18 pages - *Janvier 1977*

PI 61. Notions de base sur l'intégrale stochastique..
M. Métivier, J. Pellaumail., 41 pages - *Année 1976*

PI 62. Sur la théorie générale des processus.
J. Jacod, 11 pages - *Année 1976*

PI 63. Cylindrical stochastic integral.
M. Métivier, J. Pellaumail, 28 pages - *Année 1976*

PI 64. Sur un algorithme de calcul pour un estimateur de filtrage linéaire dans un Hilbert..
A. Hosvepian, 31 pages - *Année 1976*

PI 65. Approximations et applications de réseaux de files d'attente..
R. Marie, 44 pages - *Année 1976(épuisé)*

PI 66. A note on cyclic odd-even reduction..
W.J. Stewart, 14 pages - *Février 1977*

PI 67. Developpements sur la fiabilité des systèmes informatiques à l'Université de Newcastle Upon Tyne.
J.P. Banâtre, 27 pages - *Avril 1977*

PI 68. Méthodologie de conception de compilateurs et fiabilité..
J.P. Banâtre, F. Kerangueven, J.P. Routeau., 28 pages - *Avril 1977(épuisé)*

PI 69. Vérification and evaluation of communications protocols..
G. Le Lann, H. Le Goff, 35 pages - *Février 1977*

PI 70. Reconnaissance et classification des structures finies en analyse de données. Volume I : théories et méthodes..
I.C. Lerman, 445 pages - *Mai 1977(épuisé)*

PI 71. Combinatoral analysis in the statistical treatment of behavioral data..
I.C. Lerman, 52 pages - *Mai 1977(épuisé)*

PI 72. Présentation du projet GWELLADUR.
J. André, J. Bezivin, F. Gauduel, J.L. Nébut, R. Rannou, 89 pages - *Juin 1977*

PI 73. SIMONE par l'exemple.
J. Bezivin, Y. Jegou, A. Leroy, J.L. Nébut, R. Rannou, D. Renault, 41 pages - *Juin 1977(épuisé)*

PI 74. LOPSI : a simultaneous iteration algorithm for real matrices.
W.J. Steward, A. Jennings, 46 pages - *Septembre 1977(épuisé)*

PI 75. Sur l'exclusion mutuelle dans les réseaux informatiques.
J. Mossières, M. Tchuente, J.P. Verjus, 20 pages - *Octobre 1977(épuisé)*

PI 76. Another viw of coroutines.
J. Bezivin, J.L Nébut, R. Rannou, 14 pages - *Novembre 1977*

PI 77. An event driven compiling technique.
J.P. Banâtre, J.P. Routeau, L. Trilling, 30 pages - *Novembre 1977(épuisé)*

PI 78. Designing an application - oriented distributed system.
J.P Banâtre, F. Kerangueven, H. Leroy, G. Paget, J.P. Routeau., 14 pages - *Décembre 1977(épuisé)*

PI 79. Résolution numérique de la file d'attente $\lambda (n) / k / r$.
R. Marie, W.J. Steward, 49 pages - *Décembre 1977*

PI 80. Parallel permutations of data : a benes network control algorithm for frequently used permutations.
J. Lenfant, 41 pages - *Janvier 1978*

PI 81. Large computer architecture.
G. Boulaye, 24 pages - *Mars 1978(épuisé)*

PI 82. Une expression de la synchronisation pour les types abstraits.
M. Raynal, 12 pages - *Avril 1978(épuisé)*

PI 83. A basic course on general stochastic integration.
M. Métivier et J. Pellaumail, 56 pages - *1977(epuisé)*

PI 84. Processus continus invariants par changement de temps.
J.B. Gravereaux et J. Jacod, 9 pages - *1977*

PI 85. une méthode analytique approchée pour réseaux de files d'attente généraux.
R. Marie, 9pages - *1977(épuisé)*

PI 86. Sur une description de certains concepts GPSS en Simone.
A. Leroy et D. Renault, 17 pages - *Janvier 1978*

PI 87. Conception d'un système distribué adapté à la compilation.
J.P. Banâtre et al., 46 pages - *Décembre 1977(épuisé)*

PI 88. Types abstraits et pluralité de leurs représentations à l'exécution.
M. Banâtre et al., 16 pages - *Février 1978(épuisé)*

PI 89. Langages de programmation et mécanismes de protection.
M. Banâtre, A. Couvert, D. Herman, et M. Raynal, 43 pages - *Avril 1978(épuisé)*

PI 90. Manuel Epsimone.
J.L. Nébut, 80 pages - *Mars 1978*

PI 91. Traitement d'images.
M. Basseville, 56 pages - *Septembre 1977(épuisé)*

PI 92. Identification et contrôle.
Journées d'automatique de Rennes, 76 pages - *Septembre 1977(épuisé)*

PI 93. Les présentations factorielles de la classification.
I.C. Lerman, 64 pages - *Mai 1978(épuisé)*

PI 94. Présentation et évaluation du projet SOC : un Système d'Objets typés Conservés.
M. Banâtre, A. Couvert, D. Herman, M. Raynal, 21 pages - *Mai 1978(épuisé)*

PI 95. Introduction à la commutation téléphonique.
F. Krier, M. Raynal, L. Ungaro, 54 pages - *Mai 1978*

PI 96. Discrétisation de variables continues.
J.Y. Lafaye, 72 pages - *Mai 1978*

PI 97. Spécifications incomplètes mais suffisantes de la représentation des types abstraits.
M. C. Gaudel, 72 pages - *Mai 1978(épuisé)*

PI 98. Utilisation de la microprogrammation pour l'implémentation d'operating system.
G. Boulaye, 24 pages - *Juin 1978*

PI 99. Place de la microprogrammation dans un processus général de conception.
G. Boulaye, 41 pages - *Juin 1978*

PI 100. Expression du parallélisme dérivée de la notion d'événement.
F. André, J.P. Banâtre, J.P. Routeau, 19 pages - *Juin 1978*

PI 101. Caméléon : Calculateur spécialisé dans la mesure et le contrôle des systèmes digitaux.
B. Canet et al., 18 pages - *Juin 1978*

PI 102. Régime stationnaire quand les routages dépendent de l'état.
J. Pellaumail, 43 pages - *Juin 1978*

PI 103. Etude de l'agriculture régionale française par une méthode de classification automatique.
B. Tallur, 34 pages - *Juin 1978*

PI 104. Analyse de fautes commises par des étudiants débutant l'informatique par Algol 68.
J. André J. Barré, 32 pages - *Août 1978*

PI 105. Un algorithme de maintien de la cohérence de copies multiples.
D. Herman, J.P. Verjus, 19 pages - *Février 1979*

PI 106. Construction d'un noeud vim à partir de microprocesseurs.
F.B. Jorgensen, 32 pages - *Novembre 1978*

PI 107. Etude formelle et statistique de la notion de ressemblance.
I.C. Lerman, 114 pages - *Décembre 1978*

PI 108. Croisement de classifications floues.
I.C. Lerman, 114 pages - *Décembre 1978*

PI 109. Détection de contours dans une image numérisée.
M. Basseville ,B. Espiau, 118 pages - *Novembre 1978*

PI 110. Contribution à l'expression des interactions entre processus.
F. André, J.P. Banâtre, D. Herman, M. Raynal, J.P. Verjus, 23 pages - *Décembre 1978*

PI 111. Spécification de systèmes à environnement asynchrone.
Ph. Darondeau, P. Le Guernic, M. Raynal, 19 pages - *Décembre 1978*

PI 112. Certification informelle du logiciel à l'aide de processus communicants.
J.G. Vaucher, 20 pages - *Janvier 1979*

PI 113. Commande adaptative de systèmes linéaires une entrée-une sortie en temps discret.
J.J. Fuchs, 36 pages - *Mars 1979*

PI 114. Analyse des correspondances par sous-tableaux.
B. Escoffier, 54 pages - *Mars 1979*

PI 115. Etude analytique de réseaux de files d'attente à capacité limitée.
L.M. Le Ny, 78 pages - *Avril 1979*

PI 116. Une méthode rapide pour arriver à des algorithmes d'estimation rapides pour des fonctions de transfert AR et ARMA synthetisées en treillis.
A. Benveniste ,C. Chauré, 70 pages - *Juin 1979*

PI 117. Journées d'Automatique .
IRISA, 123 pages - *Mai 1979*

PI 118. Campagnes d'évaluation de performances réalisées à l'aide du système caméléon.
B. Canet, B. Decouty, G. Michel, P. Rolin, C. Wagner, 59 pages - *Juin 1979*

PI 119. Un générateur de tests commandé par des grammaires (manuel d'utilisation).
B. Houssais, 43 pages - *Juillet 1979*

PI 120. Traitement d'exceptions et de fautes résiduelles dans les langages de programmation.
J.P. Banâtre, F. Ployette, 37 pages - *Juin 1979*

PI 121. Types in a mixed language system.
Ph Darondeau, P. Le Guernic, M. Raynal, 14 pages - *Octobre 1979*

PI 122. Manuel du Langage LPMR (Version 1).
M. Banâtre, Ph. Darondeau, J.P. Routeau, 54 pages - *Novembre 1979*

PI 123. Conception et Réalisation d'un système adapté à la compilation parallèle.
F. André, J.P. Banâtre, H. Leroy, G. Paget, F. Ployette, J.P. Routeau, 20 pages - *Décembre 1979*

PI 124. Estimation récursive de l'état local des contours d'image et application à la prédiction adaptative en codage différentiel de signaux de télévison.
C. Richard, 195 pages - *Novembre 1979*

PI 125. Algorithmes de calcul des probabilités asymptotiques pour des files d'attente $\lambda(n)/C_k/1/N$ avec rebouclage et cas particuliers.
R. Marie, 21 pages - *Décembre 1979*

PI 126. L'expression du contrôle des accès concurrents aux objets.
P. Le Guernic ,M. Raynal, 50 Pages - *Décembre 1979*

PI 127. Classification des éléments constitutifs d'une juxtaposition de tableaux de contingence.
I.C. Lerman ,B. Tallur, 43 pages - *Janvier 1980*

PI 128. Régime stationnaire pour une station à loi de service général et arrivées dépendantes de l'état.
R. Marie J. Pellaumail, 13 pages - *Décembre 1979*

PI 129. Expression de la Communication dans les langages. Des analyses et une proposition.
M. Raynal, P. Le Guernic, 84 pages - *Janvier 1980*

PI 130. Un système d'enchères simultanées réparti.
M. Banâtre, A.Couvert, 27 pages - *Janvier 1980*

PI 131. Méthodes Pseudo-Booléennes.
G.Boulaye, 14 pages - *Janvier 1980*

PI 132. Semaine d'étude internationale sur la détection et l'estimation temps-réel des contours et des mouvements dans les images.
Organisation : CCETT, INSA, IRISA (Rennes), 260 pages - *Septembre 1979*

PI 133. Weak solutions for semi-martingales.
J. Pellaumail, 19 pages - *Mars 1980*

PI 134. Processus non séquentiel et leurs observations en univers non-centralisé.
Ph. Darondeau, 53 pages - *Avril 1980*

PI 135. Synchronisation and protection features for data abstraction.
D. Herman, M. Raynal, 21 pages - *Juin 1980*

PI 112. Certification informelle du logiciel à l'aide de processus communicants.
J.G. Vaucher, 20 pages - *Janvier 1979*

PI 113. Commande adaptative de systèmes linéaires une entrée-une sortie en temps discret.
J.J. Fuchs, 36 pages - *Mars 1979*

PI 114. Analyse des correspondances par sous-tableaux.
B. Escoffier, 54 pages - *Mars 1979*

PI 115. Etude analytique de réseaux de files d'attente à capacité limitée.
L.M. Le Ny, 78 pages - *Avril 1979*

PI 116. Une méthode rapide pour arriver à des algorithmes d'estimation rapides pour des fonctions de transfert AR et ARMA synthetisées en treillis.
A. Benveniste ,C. Chauré, 70 pages - *Juin 1979*

PI 117. Journées d'Automatique .
IRISA, 123 pages - *Mai 1979*

PI 118. Campagnes d'évaluation de performances réalisées à l'aide du système caméléon.
B. Canet, B. Decouty, G. Michel, P. Rolin, C. Wagner, 59 pages - *Juin 1979*

PI 119. Un générateur de tests commandé par des grammaires (manuel d'utilisation).
B. Houssais, 43 pages - *Juillet 1979*

PI 120. Traitement d'exceptions et de fautes résiduelles dans les langages de programmation.
J.P. Banâtre, F. Ployette, 37 pages - *Juin 1979*

PI 121. Types in a mixed language system.
Ph Darondeau, P. Le Guernic, M. Raynal, 14 pages - *Octobre 1979*

PI 122. Manuel du Langage LPMR (Version 1).
M. Banâtre, Ph. Darondeau, J.P. Routeau, 54 pages - *Novembre 1979*

PI 123. Conception et Réalisation d'un système adapté à la compilation parallèle.
F. André, J.P. Banâtre, H. Leroy, G. Paget, F. Ployette, J.P. Routeau, 20 pages - *Décembre 1979*

PI 124. Estimation récursive de l'état local des contours d'image et application à la prédiction adaptative en codage différentiel de signaux de télévison.
C. Richard, 195 pages - *Novembre 1979*

PI 125. Algorithmes de calcul des probabilités asymptotiques pour des files d'attente $\lambda(n)/C_k/1/N$ avec rebouclage et cas particuliers.
R. Marie, 21 pages - *Décembre 1979*

PI 126. L'expression du contrôle des accès concurrents aux objets.
P. Le Guernic, M. Raynal, 50 Pages - *Décembre 1979*

PI 127. Classification des éléments constitutifs d'une juxtaposition de tableaux de contingence.
I.C. Lerman, B. Tallur, 43 pages - *Janvier 1980*

PI 128. Régime stationnaire pour une station à loi de service général et arrivées dépendantes de l'état.
R. Marie, J. Pellaumail, 13 pages - *Décembre 1979*

PI 129. Expression de la Communication dans les langages. Des analyses et une proposition.
M. Raynal, P. Le Guernic, 84 pages - *Janvier 1980*

PI 130. Un système d'enchères simultanées réparti.
M. Banâtre, A.Couvert, 27 pages - *Janvier 1980*

PI 131. Méthodes Pseudo-Booléennes.
G. Boulaye, 14 pages - *Janvier 1980*

PI 132. Semaine d'étude internationale sur la détection et l'estimation temps-réel des contours et des mouvements dans les images.
Organisation : CCETT, INSA, IRISA (Rennes), , 260 pages - *Septembre 1979*

PI 133. Weak solutions for semi-martingales.
J. Pellaumail, 19 pages - *Mars 1980*

PI 134. Processus non sequentiel et leurs observations en univers non-centralisé.
Ph. Darondeau, 53 pages - *Avril 1980*

PI 135. Synchronisation and protection features for data abstraction.
D. Herman, M.Raynal, 21 pages - *Juin 1980*

PI 136. Elaboration et évaluation d'un graphe d'implication pour des données binaires.
I.C. Lerman, R. Gras, H. Rostam, 70 pages - *Août 1980*

PI 137. Rapport à la C.E.E. sur les techniques de programmation.
J. André, D. Coan, H. Geist, D. Law, Y. Leterrre, H. Schoenen, 96 pages - *Septembre 1980*

PI 138. Définition d'un logiciel de transport adapté à la mise en oeuvre d'application burotiques sur des réseaux locaux.
S. Gaucher Cazalis, F. Krier, H. Le Goff, 70 pages - *Septembre 1980*

PI 139. Efficacité des algorithmes récursifs en présence de systèmes non-stationnaires..
A. Benveniste, G. Ruget, 35 pages - *Août 1980*

PI 140. Structures de communication extensibles.
P. Le Guernic, M. Raynal, 60 pages - *Octobre 1980*

PI 141. Comparaison de tableaux de fréquence.
B. Escoffier, 16 pages - *Octobre 1980*

PI 142. Un lemme général de stabilité pour la commande adaptative en déterministe de systèmes non nécessairement à minimum de phase :.
Cl. Samson, 40 pages - *Novembre 1980*

PI 143. Détection, Estimation de l'orientation et saisie d'une cible mobile par proximétrie optique.
B. Espiau, 142 pages - *Janvier 1981*